

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I**



**TESIS DOCTORAL**

**Teoría de Chovitz de segundo orden aplicada a la búsqueda  
de proyecciones cartográficas de mínima deformación**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**José Antonio Malpica Velasco**

DIRECTOR:

**M. J. Sevilla de Lerma**

**Madrid, 2015**

IT  
UCM  
1992

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y

Astrofísica I

BIBLIOTECA UCM



5305022573

IT  
528.235  
MAL

**TEORÍA DE CHOVITZ DE  
SEGUNDO ORDEN  
APLICADA A LA BÚSQUEDA DE  
PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS  
DE MÍNIMA DEFORMACIÓN**

R. 51.035

J. A. Malpica Velasco

Madrid, 1993

Colección Tesis Doctorales. N.º 208/93

X-53-338849-9

© J. A. Malpica Velasco

Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.  
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.  
Madrid, 1993.  
Ricoh 3700  
Depósito Legal: M-30779-1993

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
SECCIÓN DEPARTAMENTAL DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA  
(DEP. DE FÍSICA DE LA TIERRA, ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA I)

TEORÍA DE CHOVIETZ DE SEGUNDO ORDEN  
APLICADA A LA BUSQUEDA DE  
PROYECCIONES CARTOGRAFICAS  
DE MÍNIMA DEFORMACIÓN

Por

J.A. MALPICA VELASCO

Memoria para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Matemáticas  
realizada bajo la dirección del  
Dr. M.J. SEVILLA DE LERMA

M A D R I D, febrero, 1992

*A mis padres*

#### AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a mis amigos de la asociación PACEM el interés mostrado hacia este trabajo, particularmente a Maripina, Susana y Conchita. Así mismo a mis compañeros del instituto "Arcipreste de Hita". También estoy muy agradecido a los profesores e investigadores del Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC) por sus consejos y apoyo .

De manera especial estoy en deuda con el que fue mi profesor de Geodesia y Cartografía, el catedrático de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM, ahora director de esta tesis y sin cuya colaboración no hubiera sido posible llevar a buen término un trabajo tan arduo.

# ÍNDICE =====

	Página
INTRODUCCION.....	1
 1 ESTUDIO DEL TENSOR METRICO.....	 7
1.1 Definiciones previas.....	7
1.2 Tensor métrico. Elemento lineal.....	10
1.3 Curvatura de Gauss .....	15
1.4 Ecuaciones de Gauss y Weingarten.....	16
1.5 Tensor de Curvatura de Riemann.....	21
1.6 Método isoparamétrico.....	25
1.7 Desarrollo de $g_{ij}$ . Coeficientes de Chovitz. Problema directo	26
1.8 Cálculo de la representación conocidos los coeficientes problema inverso.....	27
1.9 Representación de la esfera en el plano.....	33
1.10 Propiedades de las proyecciones cartográficas en términos de la matriz $A_2$ .....	36
 2 DEFORMACIONES.....	 43
2.1 Generalidades.....	43
2.2 Módulo de deformación lineal.....	43
2.3 Direcciones principales.....	47
2.4 Indicatriz de Tissot.....	48
2.5 Cálculo de las direcciones principales.....	53
2.6 Alteración de los ángulos.....	55
2.7 Alteración de longitudes.....	57
2.8 Alteración de las áreas.....	58
 3 PROYECCIONES.....	 61
3.1 Noticia histórica.....	61
3.2 Clasificación.....	68
3.3 Obtención de la proyección a partir de la matriz $A_2$ .....	70
3.4 Obtención de la matriz $A_2$ a partir de la proyección.....	71
3.5 Proyecciones acimutales.....	74

3.4	Obtención de la matriz $A_2$ a partir de la proyección.....	71
3.5	Proyecciones acimutales.....	74
3.6	Proyecciones cónicas.....	83
3.7	Proyecciones cilíndricas.....	86
3.8	Proyecciones pseudocónicas.....	93
3.9	Proyecciones pseudocilíndricas.....	94
3.10	Proyecciones policónicas.....	95
3.11	Transformación de coordenadas.....	96

#### 4 MINIMA DEFORMACION..... 103

4.1	Equilibrio de errores.....	103
4.2	Problema de Milnor.....	107
4.3	Conceptos de elasticidad.....	113
4.4	Elasticidad aplicada a la cartografía.....	126
4.5	Energía de deformación.....	142
4.6	Proyección con mínima energía de deformación W.....	148

#### 5 APLICACION Y CONCLUSIONES

5.1	Diferencia entre las fórmulas directas y de segundo orden..	153
5.2	Estudio de las proyecciones con las propiedades elásticas..	156
5.3	Programa informático.....	158
5.4	Conclusiones.....	162

#### REFERENCIAS..... 165

Apéndice I.....	170
Apéndice II.....	173
Apéndice III.....	185
Apéndice IV.....	197

Anexo. (Listado de los programas informáticos en TURBOPASCAL)



## INTROUCCION

=====

El objetivo básico de la Cartografía es encontrar la mejor representación de la superficie de la Tierra sobre un plano. Ya que no se puede realizar una proyección de la esfera sobre el plano de manera que conserve los ángulos y las áreas a un mismo tiempo, sí es deseable que la deformación producida sea mínima. A lo largo de la historia y más recientemente, cuando los ordenadores y calculadoras electrónicas programables facilitan los cálculos, se ha realizado esta búsqueda según distintos criterios.

El gran número de proyecciones y la dificultad de algunas de sus fórmulas producen una dispersión teórica que dificulta, en gran manera, el estudio de esta disciplina.

La teoría de segundo orden, iniciada por Antonio Marussi (1950), y desarrollada por B.H. Chovitz (1952, 1954, 1956), trata de unificar el estudio de la Cartografía Matemática bajo los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ , que se han agrupado aquí mediante la matriz llamada  $A_2$ .

Por otra parte, recientemente ha recibido un gran impulso la aplicación de la teoría de la elasticidad a la Cartografía con los trabajos de A. Dermanis, E. Livieratos y I. Paraschakis (1983, 1984). Entre otras cosas, dan nuevos criterios para comparar proyecciones y la búsqueda de mínima deformación.

En la presente memoria presentaremos todas estas cuestiones desde un punto de vista unificado y obtendremos interesantes resultados.

El primer capítulo comienza con el estudio de las variedades. Una variedad se caracteriza por dos propiedades básicas: dimensión y curvatura. Se particulariza inmediatamente a dos dimensiones, esto es, superficies. La teoría es intrínseca, lo

que significa que no es necesario referirse al espacio de tres dimensiones. No hay, por tanto, distinción entre un plano, cono o cilindro, todos ellos tienen idéntica curvatura. La aproximación será diferencial, no global, por tanto las herramientas de la geometría diferencial se utilizarán para construir la teoría. Se comienza dando unas definiciones previas, cimientos sobre los que se construye todo lo demás, en concreto el tensor métrico y el elemento lineal, donde se encuentran implícitas las propiedades geométricas de la variedad. Como dice Aleksandrov en la página 116 del tomo segundo (Aleksandrov, 1979) "la idea de estudiar la geometría intrínseca se le ocurrió a Gauss en relación con los problemas de geodesia y cartografía". Resulta sorprendente la potencia y belleza de dicha geometría aplicada al estudio de las proyecciones cartográficas donde el elemento lineal es como una regla para medir en la superficie.

Se considera la representación isoparamétrica para definir las proyecciones, se tienen de esta manera sus propiedades en función del tensor métrico de la superficie. Dicho tensor es desarrollado en serie de Taylor considerando sólo los términos hasta el segundo orden. Se reduce el estudio únicamente a los coeficientes de los términos de segundo grado, para facilitar los cálculos.

Se impone la condición de regularidad para trabajar con longitudes de arco reales y positivas que fácilmente se traducen en condiciones sobre los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ . Más elaborada resulta la condición de curvatura necesaria para asegurar que el elemento lineal es el correspondiente a una determinada variedad. Con las ecuaciones de Gauss Weingarten se expresa la curvatura de Gauss en función de la componente  $R_{1212}$  del tensor de Riemann y el determinante del tensor métrico. Se ve que  $R_{1212}$  se puede expresar en función de los símbolos de Christoffel y éstos a su vez de los  $a_{hk}^{ij}$  encontrando por tanto una expresión para la curvatura de Gauss en función de dichos coeficientes, y esta constituye la condición de curvatura que estará presente en toda matriz  $A_2$  hasta el final.

Se trata el problema de la obtención de los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$  conocida la representación de una superficie en otra, y el

inverso, obtención de la representación con unos  $a_{hk}^{ij}$  dados. Se particulariza la teoría a la representación de la esfera sobre el plano y se termina el capítulo dando las propiedades de las proyecciones según condiciones sobre los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ .

En el segundo capítulo se hace un estudio de las deformaciones que se producen al representar la esfera sobre el plano en función de la teoría desarrollada en el primer capítulo. La indicatriz de Tissot constituye el eje central de este capítulo. Ya que el módulo de deformación lineal en general va a ser distinto de un punto a otro y en cada punto va a depender de la dirección en que se mida, los semiejes de la indicatriz aparecen como objetos muy útiles en el estudio de las deformaciones. La indicatriz de Tissot se volverá a obtener en el capítulo cuarto, pero esta vez aplicando métodos de la teoría de la elasticidad.

A lo siguiente a lo que nos dedicamos en el capítulo segundo es a encontrar unas expresiones de los semiejes de la elipse indicatriz, así como de sus direcciones principales en función de los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ . Se amplía el estudio de las alteraciones en ángulos y longitudes a las áreas que no está en trabajos anteriores.

El capítulo tercero comienza con una nota histórica donde queda patente como esta ciencia ha sido fiel reflejo de las inquietudes de las diferentes culturas a lo largo de los siglos. Se continúa con la clasificación de las proyecciones más importantes. Se da el método general para construir una proyección dando valores a las componentes de la matriz  $A_2$  y viceversa, y se obtiene la matriz  $A_2$  para distintas proyecciones.

Se termina el capítulo tratando la transformación de coordenadas, directa e inversa, y su comparación en un ejemplo con fórmulas clásicas.

El último capítulo estudia los métodos más importantes que tratan de minimizar los errores. Desde la proyección de Airy (Airy, 1861) hasta la de Grafarend y Lohse (Grafarend y Lohse, 1991) pasando por Tissot y Milnor, se ve la tendencia contemporánea, que

que significa que no es necesario referirse al espacio de tres dimensiones. No hay, por tanto, distinción entre un plano, cono o cilindro, todos ellos tienen idéntica curvatura. La aproximación será diferencial, no global, por tanto las herramientas de la geometría diferencial se utilizarán para construir la teoría. Se comienza dando unas definiciones previas, cimientos sobre los que se construye todo lo demás, en concreto el tensor métrico y el elemento lineal, donde se encuentran implícitas las propiedades geométricas de la variedad. Como dice Aleksandrov en la página 116 del tomo segundo (Aleksandrov, 1979) "la idea de estudiar la geometría intrínseca se le ocurrió a Gauss en relación con los problemas de geodesia y cartografía". Resulta sorprendente la potencia y belleza de dicha geometría aplicada al estudio de las proyecciones cartográficas donde el elemento lineal es como una regla para medir en la superficie.

Se considera la representación isoparamétrica para definir las proyecciones, se tienen de esta manera sus propiedades en función del tensor métrico de la superficie. Dicho tensor es desarrollado en serie de Taylor considerando sólo los términos hasta el segundo orden. Se reduce el estudio únicamente a los coeficientes de los términos de segundo grado, para facilitar los cálculos.

Se impone la condición de regularidad para trabajar con longitudes de arco reales y positivas que fácilmente se traducen en condiciones sobre los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ . Más elaborada resulta la condición de curvatura necesaria para asegurar que el elemento lineal es el correspondiente a una determinada variedad. Con las ecuaciones de Gauss Weingarten se expresa la curvatura de Gauss en función de la componente  $R_{1212}$  del tensor de Riemann y el determinante del tensor métrico. Se ve que  $R_{1212}$  se puede expresar en función de los símbolos de Christoffel y éstos a su vez de los  $a_{hk}^{ij}$  encontrando por tanto una expresión para la curvatura de Gauss en función de dichos coeficientes, y esta constituye la condición de curvatura que estará presente en toda matriz  $A_2$  hasta el final.

Se trata el problema de la obtención de los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$  conocida la representación de una superficie en otra, y el

inverso, obtención de la representación con unos  $a_{hk}^{ij}$  dados. Se particulariza la teoría a la representación de la esfera sobre el plano y se termina el capítulo dando las propiedades de las proyecciones según condiciones sobre los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ .

En el segundo capítulo se hace un estudio de las deformaciones que se producen al representar la esfera sobre el plano en función de la teoría desarrollada en el primer capítulo. La indicatriz de Tissot constituye el eje central de este capítulo. Ya que el módulo de deformación lineal en general va a ser distinto de un punto a otro y en cada punto va a depender de la dirección en que se mida, los semiejes de la indicatriz aparecen como objetos muy útiles en el estudio de las deformaciones. La indicatriz de Tissot se volverá a obtener en el capítulo cuarto, pero esta vez aplicando métodos de la teoría de la elasticidad.

A lo siguiente a lo que nos dedicamos en el capítulo segundo es a encontrar unas expresiones de los semiejes de la elipse indicatriz, así como de sus direcciones principales en función de los coeficientes  $a_{hk}^{ij}$ . Se amplía el estudio de las alteraciones en ángulos y longitudes a las áreas que no está en trabajos anteriores.

El capítulo tercero comienza con una nota histórica donde queda patente como esta ciencia ha sido fiel reflejo de las inquietudes de las diferentes culturas a lo largo de los siglos. Se continua con la clasificación de las proyecciones más importantes. Se da el método general para construir una proyección dando valores a las componentes de la matriz  $A_2$  y viceversa, y se obtiene la matriz  $A_2$  para distintas proyecciones.

Se termina el capítulo tratando la transformación de coordenadas, directa e inversa, y su comparación en un ejemplo con fórmulas clásicas.

El último capítulo estudia los métodos más importantes que tratan de minimizar los errores. Desde la proyección de Airy (Airy, 1861) hasta la de Grafarend y Lohse (Grafarend y Lohse, 1991) pasando por Tissot y Milnor, se ve la tendencia contemporánea, que

es la de siempre, en la búsqueda de proyecciones que optimicen la representación de la Tierra. Es aquí donde se señala como la elipse de Tissot es mencionada por Clarke y Sir James (Clarke y Sir James, 1862) 18 años antes de la publicación de la memoria de Tissot (Tissot, 1880). Que tengamos noticia ningún autor posterior ha relacionado la mencionada elipse con aquellos autores.

El problema de Milnor es tratado con la teoría de segundo orden para más tarde realizar un proceso análogo con las propiedades elásticas. Las secciones siguientes se dedican a conceptos elásticos y su relación con los cartográficos, así se relaciona la dilatación y la cizalladura con las deformaciones areolares y angulares. Se hace especial hincapié en la diferencia entre el método lagrangiano y euleriano donde, por primera vez se encuentran fórmulas que relacionan ambas propiedades, también se dan nuevas relaciones entre los semejes de la indicatriz de Tissot y de la indicatriz recíproca (llamada así por Love (1927)). Las consecuencias intuitivas de estas expresiones son confirmadas plenamente por los gráficos generados por el programa y de los que se han puesto algunos ejemplos al final, en el Apéndice IV, por ejemplo se ve como al estudiar la dilatación según el método lagrangiano o euleriano esta es negativa o positiva, consecuencia a su vez de las definiciones de dichos métodos.

Se expresa la energía de deformación en función de los semejes de la indicatriz de Tissot para posteriormente buscar la proyección que hace mínima dicha energía. Se termina dando las propiedades y las ecuaciones de transformación de la nueva proyección.

La matriz  $A_2$  logra concentrar de una manera muy clara, todas las propiedades de las proyecciones cartográficas: conformidad, equivalencia, equidistancia, simetrías, etc. En algunas ocasiones se va a tener la misma  $A_2$  para dos proyecciones distintas, mostrando en este caso las semejanzas de ambas en segundo orden. Teniendo en cuenta la curvatura de la superficie y la regularidad e isometría en el origen, obtendremos la proyección correspondiente, disponiendo así de una gama infinita, que encontrará su aplicación más importante en el programa para

ordenador del anexo.

El uso del cálculo tensorial, combinado con el matricial, responde a que permite prescindir de sistemas coordenados concretos y fijarse en las características invariantes de las proyecciones aparte de una presentación elegante.

Intuitivamente, cada proyección consistiría en una transformación de una región de la esfera en su correspondiente del plano, por un proceso elástico de estiramientos y contracciones sobre el material de la esfera. En esta memoria se ha buscado la proyección, dentro de la teoría de segundo orden, que exige mínima energía de disipación para formarse, según dicho proceso elástico. Visto el éxito de la teoría de segundo orden de Chovitz en el tratamiento del problema de Milnor, se ha fundido dicha teoría con la de Dermanis para buscar la proyección de mínima energía entre las azimutales, encontrándose en la que tiene el punto de vista en  $h = -3.6$

Se puede considerar el fundamento de este trabajo sobre tres pilares básicos: cartografía, elasticidad y teoría de segundo orden. En los años cincuenta Chovitz une, por arriba, los pilares correspondientes a la cartografía y a la teoría de segundo orden consiguiendo una teoría unificada de las proyecciones. En la década de los ochenta, Dermanis une, de la misma manera, la cartografía y la elasticidad, realizando el estudio cartográfico de ciertas proyecciones con nuevas propiedades como la dilatación y la cizalladura.

En esta memoria se une la teoría de segundo orden con la elasticidad, cerrando de esta manera el triángulo que de forma esquemática se ha construido sobre los tres pilares citados. Sobre este triángulo se levanta un tetraedro en cuyo vértice superior se encuentra la proyección de mínima deformación según la energía elástica.

En resumen, se intenta realizar un estudio de las proyecciones cartográficas según la matriz  $A_2$  y la búsqueda de mínima deformación según el criterio de la elasticidad aplicando la

teoría de segundo orden.

Pensamos que con este trabajo se realiza una modesta contribución a la cartografía matemática en lo que se refiere a:

- Extensión de su estudio con propiedades no tratadas hasta ahora, cizalladura euleriana, dilatación euleriana, energía euleriana y energía lagrangiana. Las dos últimas con la teoría de segundo orden ya que las fórmulas no son tratables de otra manera.
- Comparación de la teoría directa y de segundo orden en el estudio de las proyecciones cartográficas, que Chovitz (1954) ya realizó con un par de ejemplo, pero ahora, casi cuarenta años después, con la potencia que ofrecen los métodos informáticos se ha ampliado y mejorado de manera considerable. Las posibilidades que ofrece el programa del anexo son infinitas.
- Búsqueda de proyecciones que minimicen la deformación angular y areolar a la vez. Para las proyecciones perspectivas y aplicando la teoría de segundo orden se encuentra la ya mencionada proyección con mínima energía de deformación, así llamada por el criterio seguido para su construcción.



## 1 ESTUDIO DEL TENSOR METRICO = =====

### 1.1 DEFINICIONES PREVIAS

Un **espacio topológico** es un conjunto  $E$  sobre el cual está definido un conjunto de partes de  $E$ , los abiertos, que satisface las siguientes propiedades:

- 1) toda reunión (finita o no) de abiertos es un abierto,
- 2) toda intersección finita de abiertos es un abierto,
- 3) el **espacio total**  $E$  y el conjunto vacío son abiertos.

Un subconjunto  $A$  de  $E$  se dice **cerrado** cuando su complementario (en  $E$ ) es abierto.

Se llama **entorno** de punto  $x$  a todo subconjunto que contiene un abierto que contiene a  $x$ .

Un espacio topológico se dice **separado** (o de Hausdorff) si dos puntos cualesquiera tienen entornos disjuntos.

Un espacio topológico  $E$  se dice **compacto** si de todo recubrimiento del espacio  $E$  por una familia de abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito de abiertos.

Una **aplicación**  $f$  de un conjunto  $U$  en un conjunto  $V$  es una ley que asocia a cada elemento  $u \in U$  un elemento  $v \in V$ ; se notará  $v = f(u)$ . Si  $f$  y  $g$  son respectivamente una aplicación de  $U$  en  $V$  y de  $V$  en  $W$ , se llama **aplicación composición** de aplicaciones  $f$  y  $g$ , que se notará  $g \circ f$ , la aplicación de  $U$  en  $W$  definida por  $w = g(f(u))$ .

Una aplicación  $f$  de  $U$  (espacio topológico) se dice **continua** en  $u \in U$  si para cada entorno  $H$  de  $f(u)$  existe un entorno  $h$  de  $u$  tal que  $f(h) \subset H$ .  $f$  se dice continua sobre  $U$  si es continua en todo punto  $u \in U$ . Un **homeomorfismo** de  $U$  sobre  $V$  es una aplicación biyectiva bicontinua.

El **espacio**  $R^n$  es el conjunto de  $n$ -uplas ordenadas de números reales  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$

Una aplicación  $u \rightarrow \|u\|$  de un espacio vectorial  $U$  (que tomaremos sobre el cuerpo de los reales) en  $\mathbb{R}$  es una **norma** si:

$$\|u\| \geq 0, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Una norma sobre  $U$  induce una topología compatible con la estructura vectorial (bolas abiertas).

Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado que es completo (toda sucesión de Cauchy es convergente).

Sean  $U$  y  $V$  dos espacios de Banach,  $f$  una aplicación de un abierto  $X \subset U$  en  $V$ . Se dice que  $f$  es **diferenciable** en el punto  $x_0 \in X$  si existe una aplicación lineal continua de  $U$  en  $V$  llamada diferencial de  $f$  y notada por  $f'_{x_0}$  tal que, si  $x_0 + \Delta x \in X$ :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'_{x_0}(\Delta x) + \alpha \|\Delta x\|$$

donde  $\alpha$  es un elemento de  $V$  cuya norma tiende a cero con  $\Delta x$ .

Una aplicación  $f$  de un abierto  $X \subset U$  en  $V$  se dice **diferenciable** en  $X$  si es diferenciable en cada punto de  $X$ .

El espacio  $\mathbb{R}^n$  con la estructura vectorial usual, se dota de una estructura de espacio de Banach con la norma definida por:

$$\|u\|^2 = (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2.$$

Una aplicación  $f$  de un abierto  $X \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^p$ , definido por las  $p$  funciones de  $n$  variables:

$$v^\alpha = f^\alpha(u^i), \quad \alpha = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, n$$

es diferenciable (de clase  $C^p$ ) si y solamente si estas funciones admiten derivadas parciales de orden  $p$ , continuas, con respecto a estas variables.

La diferencial de la aplicación  $f$  es la aplicación lineal

definida por la matriz de elementos  $\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$  que se llama matriz jacobiana.

$$\text{matriz } \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

Una estructura fibrada sobre un espacio topológico E esta dada por los elementos siguientes:

- 1) una base B del espacio topológico;
- 2) una aplicación continua sobreyectiva p, llamada proyección de E sobre B.  $p^{-1}(u) = F_u$  se llama fibra sobre u;
- 3) un recubrimiento de B por una familia de abiertos X tal que  $p^{-1}(X)$  sea homeomorfo al producto topológico  $X \times F$ , por un homeomorfismo  $\varphi_X$  tal que si  $u \in U$ ,  $\varphi_X(u) = (p(u), \tau_X(u))$  donde  $\tau_X$  es un homeomorfismo de  $F_u$  sobre F;
- 4) un grupo topológico G (Espacio topológico dotado de una estructura de grupo compatible con la topología) de homeomorfismos de F tal que si  $u \in X_1 \cap X_2$ , el homeomorfismo de F sobre el mismo definido por  $\tau_{X_1} \circ \tau_{X_2}^{-1}$  es un elemento g de G dependiendo continuamente de u en  $X_1 \cap X_2$ .

Se llama sección de un espacio fibrado E una aplicación f de la base B en E tal que su compuesta con la proyección p sea la aplicación identidad:  $p \circ f = 1$ .

Una variedad (topológica) de dimensión n es un espacio topológico separado donde cada punto pose una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , es decir que es reunión de una familia de abiertos homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Sea X uno de estos abiertos,  $\varphi$  el homeomorfismo de X sobre  $\mathbb{R}^n$  (o sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ), al par  $(X, \varphi)$  se le llama carta local (o sistema de coordenadas local).

Un atlas de clase  $C^p$  sobre una variedad  $V_n$  es un recubrimiento de esta variedad por una familia de abiertos  $X^i$  homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  tales que dadas dos cartas locales cualesquiera  $(X_1, \varphi_1)$  y  $(X_2, \varphi_2)$  la aplicación  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  es un difeomorfismo (cuando  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  y  $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1}$  son

diferenciables) de clase  $C^p$  entre los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  imágenes de  $X_1 \cap X_2$  por los homeomorfismos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

Se dice que  $V_n$  es una **variedad diferenciable** de clase  $C^p$  cuando un atlas de clase  $C^p$  dota a  $V_n$  de una estructura diferencial de clase  $C^p$ .

Un **vector tangente**  $v$  a la variedad  $V_n$  en  $x_0$  es una clase de equivalencia, de todos los arcos de curva que tienen la misma tangente en  $x_0$ . Diremos que cada una de estas curvas tiene a  $v$  por vector tangente.

Los vectores tangentes en un punto  $x_0$  de una variedad diferenciable  $V_n$  forman un espacio vectorial sobre los reales (Choquet-Bruhat, 1968) que llamaremos **espacio vectorial tangente** a  $V_n$  en  $x_0$  y notaremos por  $T_{x_0}$ .

Una **forma p-lineal** es una aplicación de  $T_x \times T_x \times \dots \times T_x$  en los números reales  $\mathbb{R}$ .

El **espacio de tensores p covariante**, de una variedad diferencial  $V_n$ , que notaremos por  $\otimes^p T_x^*$ , es el espacio de formas p-lineales  $t$  sobre  $T_x$ .

El **espacio de tensores p contravariante**, que notaremos por  $\otimes^p T_x$ , es el dual del precedente.

Un campo de tensores (por ejemplo p covariante) es una sección del espacio fibrado correspondiente, que asocia a cada punto  $x \in V_n$  un tensor  $t_x \in \otimes^p T_x^*$ .

## 1.2 TENSOR METRICO. ELEMENTO LINEAL

Una **estructura riemanniana** sobre una variedad diferenciable  $V_n$  (clase  $C^p$ ) es la dada por un campo de tensores  $g$  (clase  $C^{p-1}$ ), dos veces covariante, a  $g$  se le llama **tensor métrico** y cumple las siguientes propiedades en coordenadas locales:

- 1) es simétrico  $g_{ij} = g_{ji}$ ; [1]
- 2) la matriz  $(g_{ij})$  es regular;  $\det(g_{ij}) \neq 0$  [2]
- 3) la forma cuadrática es definida positiva  $\forall (v^i)$  no todos nulos  
 $g_{ij} v^i v^j > 0$  [3]

Aquí  $v^i$  son las coordenadas locales y  $g_{ij}$ , para  $i$  y  $j$  fijos, las componentes del tensor métrico.

El tensor  $\{g_{ij}\}$  aplicado en un punto concreto  $x_0$ , que notaremos por  $g_{x_0}$ , dota al espacio vectorial  $T_{x_0}$  de una estructura de espacio vectorial euclídeo, el producto escalar de los vectores  $u, v \in T_{x_0}$  será por definición:

$$\langle u, v \rangle = g_{x_0}(u, v)$$

es decir, en coordenadas locales utilizando el criterio de suma de Einstein

$$\langle u, v \rangle = g_{ij} u^i v^j$$

Se deduce de esta definición que los  $g_{ij}$  son los productos escalares de los vectores de la base:

$$\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$$

por tanto  $g$  está determinado por  $n^2$  funciones diferenciables (Klingenberg, 1982).

La norma de un vector  $u$  es el número real:

$$\|u\|^2 = g_{ij} u^i u^j$$

El elemento lineal del espacio en un sistema de coordenadas cualquiera viene dado por:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

A todo punto  $x_0$ , de coordenadas  $(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$  se le puede asociar un sistema de coordenadas cartesianas en el que el punto  $x_0$  sería el origen y los vectores de la base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  serían escogidos de manera que las coordenadas de un punto  $x_1(u_0^1 + du^1, u_0^2 + du^2, \dots, u_0^n + du^n)$  infinitamente próximo a  $x_0$  sean precisamente  $du^1, du^2, \dots, du^n$ . Sería

suficiente para esto que cada vector  $e_i$  fuera tangente a la  $i$ -ésima curva coordenada (la que se obtiene haciendo variar solamente la coordenada  $u^i$ ) y que de una manera más precisa representa la velocidad del punto que recorriera esta curva mirando la coordenada  $u^i$  como representante del tiempo. A este sistema de coordenadas cartesianas, le llamaremos **representación natural** referida al punto  $x_0$ .

Como se dijo más arriba, el producto escalar de los vectores  $e_i$  y  $e_j$  es  $g_{ij}$ ,  $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$ .

El ángulo  $\varphi_{ij}$  entre la  $i$ -ésima y la  $j$ -ésima líneas coordenadas estará dado por:

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$$

Por otra parte, el producto vectorial de los vectores  $e_i$  y  $e_j$  es  $|e_i \times e_j| = \sqrt{g}$ , donde  $g$  es el determinante de  $g_{ij}$ .

En dos dimensiones, si consideramos una pequeña región de superficie, limitada por las curvas,  $u^1$ ,  $u^1+du^1$ ,  $u^2$  y  $u^2+du^2$ . Como primera aproximación del área tomaremos el paralelogramo de lados:  $e_1 du^1$  y  $e_2 du^2$ , el área será entonces

$$dA = |e_1 \times e_2| du^1 du^2 = \sqrt{g} du^1 du^2 \quad [4]$$

#### Teorema fundamental de la geometría métrica:

Para sistemas distintos de coordenadas el tensor métrico no puede tener la misma forma.

Para su demostración ver Cartan (Cartan, 1946). Este autor en la obra citada analiza el teorema de la forma siguiente: "El teorema precedente muestra que todas las propiedades geométricas del espacio están virtualmente contenidas en su elemento lineal (con la restricción de la orientación). Constituye el teorema fundamental de la geometría métrica".

En esta memoria se hará gran uso de dicho elemento lineal. Puesto que  $ds^2$  es un invariante, cuando cambiemos el sistema de coordenadas cambiará  $g_{ij}$ .

Una superficie inmersa en el espacio ordinario puede ser considerada como un espacio de Riemann de dos dimensiones donde el elemento lineal es el elemento lineal (de Gauss) de la superficie o primera forma fundamental. Se escribe:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 = g_{ij}du^idu^j$$

donde  $u^i$  ( $u^1, u^2$  puesto que estudiamos la dimensión dos) es un sistema de coordenadas.

Los sistemas de coordenadas deberán verificar que dado un punto  $x_0$  sólo pasarán dos curvas por ese punto; la  $u^1 = \text{cte.}$  y la  $u^2 = \text{cte.}$ , las coordenadas del punto serán entonces  $(u_0^1, u_0^2)$ , es decir, esta representación es única, salvo puntos singulares aislados (por ejemplo el polo de una esfera para el sistema de coordenadas esféricas: latitud y longitud).

Los  $g_{ij}$  son funciones de las  $u^i$ . Como estamos estudiando superficies  $g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$  es el conocido tensor métrico de la superficie.

¿Qué le pasa a  $ds^2$  si cambiamos de sistema de coordenadas? Vamos a demostrar ahora lo que dijimos antes: es invariante.

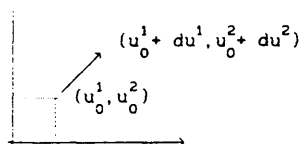
Sea el cambio de  $u^i$  por  $v^i = v^i(u^k)$ . Así tenemos dos representaciones de la misma superficie

$$x(u^i) \quad \text{y} \quad x^*(v^i)$$

Entonces, los elementos diferenciales se representan por

$$\begin{aligned} dx &= x_1 du^1 + x_2 du^2 \\ dx^* &= x_1^* dv^1 + x_2^* dv^2 \end{aligned}$$

Hemos designado con subíndice a la derivada parcial correspondiente, es decir,



$$x_i = \frac{\partial x(u^1, u^2)}{\partial u^i} \quad y \quad x_i^* = \frac{\partial x^*(v^1, v^2)}{\partial v^i}$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} (ds^*)^2 &= |dx^*|^2 = |(x_1^* dv^1 + x_2^* dv^2)|^2 = |x_1^* (v_1^1 du^1 + v_1^2 du^2) + \\ &+ x_2^* (v_2^1 du^1 + v_2^2 du^2)|^2 = |(x_1^* v_1^1 + x_2^* v_1^2) du^1 + (x_1^* v_2^1 + \\ &+ x_2^* v_2^2) du^2|^2 = |x_1 du^1 + x_2 du^2|^2 = |dx|^2 = ds^2 \end{aligned}$$

ahora

$$v_k^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k}, \text{ para } i \text{ y } k = 1, 2$$

Esto demuestra que es un invariante.

No ocurre lo mismo con los coeficientes fundamentales  $g_{ij}$ . Se demuestra que (Lipschutz, 1970) :

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^* (v_1^1)^2 + 2g_{12}^* v_1^1 v_1^2 + g_{22}^* (v_1^2)^2 \\ g_{12} &= g_{11}^* v_1^1 v_2^1 + g_{12}^* (v_1^1 v_2^2 + v_1^2 v_2^1) + g_{22}^* v_1^2 v_2^2 \\ g_{22} &= g_{11}^* (v_2^1)^2 + 2g_{12}^* v_2^1 v_2^2 + g_{22}^* (v_2^2)^2 \end{aligned}$$

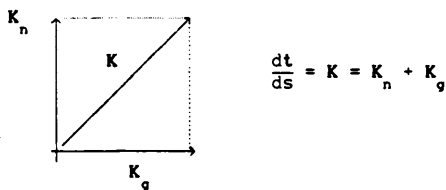
Queda claro que cuando cambiemos de superficie cambiará la primera forma fundamental y por supuesto el tensor métrico. Luego el tensor depende de las coordenadas y la superficie.

Los sistemas coordenados están restringidos a las condiciones de regularidad (1), (2), (3) (de 1.2) (trabajamos con longitudes reales y debe ser  $g, g_{11}, g_{22} > 0$ ) y además a una condición de curvatura de la que hablaremos enseguida.



### 1.3 CURVATURA DE GAUSS

Si sobre la superficie tomamos una curva  $C$  que pasa por el punto  $(u_0^1, u_0^2)$ , si  $t$  es el vector tangente unitario a  $C$  en el punto señalado y  $ds$  es el elemento de arco, el vector curvatura  $K$  viene dado por  $\frac{dt}{ds}$  (Struik, 1955). Descompongamos  $K$  en una componente  $K_g$  tangente y en una componente  $K_n$  normal a la superficie



El vector  $K_n$  se llama vector **curvatura normal** o curvatura de Gauss. Este queda determinado por la curva  $C$  (no depende de la elección del sentido de  $t$  o  $U$ ).  $U$  es el vector unitario normal a la superficie en un punto determinado  $U = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$ .

El vector  $K_g$  se denomina vector **curvatura tangencial** o vector **curvatura geodésica**.

De la ecuación  $U \cdot t = 0$  obtenemos por derivación a lo largo de  $C$ :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} \cdot U &= -t \cdot \frac{dU}{ds} = - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dU}{ds} \\ K_n &= - \frac{dx}{dx} \cdot \frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

El denominador es la primera forma fundamental del apartado anterior. El numerador es otro invariante conocido como **segunda forma fundamental**, que desarrollando llegaríamos a

$$dx \cdot dU = b_{11} (du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} (du^2)^2$$

donde  $b_{ij}$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental y vienen dados por O'Neill (O'Neill, 1966),

$$b_{11} = U \cdot \frac{\partial^2 x(u^1)}{(\partial u^1)^2}$$

derivando ahora  $g_{12}$  respecto a  $u^1$  y  $u^2$ , y utilizando (8)

$$\begin{aligned}(g_{12})_1 &= (x_1 x_2)_1 = x_{11} x_2 + x_1 x_{12} = x_{11} x_2 + \frac{1}{2} (g_{11})_2 \\(g_{12})_2 &= (x_1 x_2)_2 = x_{12} x_2 + x_1 x_{22} = x_{22} x_1 + \frac{1}{2} (g_{22})_1\end{aligned}\quad [9]$$

de donde

$$\begin{aligned}x_2 x_{11} &= (g_{12})_1 - \frac{1}{2} (g_{11})_2 \\x_1 x_{22} &= (g_{12})_2 - \frac{1}{2} (g_{22})_1\end{aligned}\quad [10]$$

Según las ecuaciones de Gauss (6) y teniendo en cuenta (8) y (9)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (g_{11})_1 &= x_1 x_{11} = \Gamma_{11}^1 x_1 x_1 + \Gamma_{11}^2 x_1 x_2 = \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} \\(g_{12})_1 - \frac{1}{2} (g_{11})_2 &= x_2 x_{11} = \Gamma_{11}^1 x_2 x_1 + \Gamma_{11}^2 x_2 x_2 = \Gamma_{11}^1 g_{12} + \\&+ \Gamma_{11}^2 g_{22}\end{aligned}\quad [11]$$

$$\frac{1}{2} (g_{11})_2 = x_1 x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_1 x_2 = \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} \quad [12]$$

$$\frac{1}{2} (g_{22})_1 = x_2 x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_2 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 x_2 = \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22} \quad [13]$$

$$\begin{aligned}(g_{12})_2 - \frac{1}{2} (g_{22})_2 &= x_1 x_{22} = \Gamma_{22}^1 x_1 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_2 x_2 = \Gamma_{22}^1 g_{12} + \\&+ \Gamma_{22}^2 g_{22}\end{aligned}\quad [14]$$

$$\begin{aligned}(g_{12})_2 - \frac{1}{2} (g_{22})_1 &= x_1 x_{22} = \Gamma_{22}^1 x_1 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_1 x_2 = \Gamma_{22}^1 g_{11} + \\&+ \Gamma_{22}^2 g_{12}\end{aligned}\quad [15]$$

$$\frac{1}{2} (g_{22})_2 = x_2 x_{22} = \Gamma_{22}^{12} x_2 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_2 x_2 = \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} \quad [16]$$

Se resuelven (11) y (12) para  $\Gamma_{11}^1$  y  $\Gamma_{11}^2$ , (12) y (13) para  $\Gamma_{12}^1$  y  $\Gamma_{12}^2$  y (14) y (15) para  $\Gamma_{22}^1$  y  $\Gamma_{22}^2$ , y se obtiene:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{g_{22}(g_{11})_1 - 2g_{12}(g_{12})_1 + g_{12}(g_{11})_2}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2g_{11}(g_{12})_1 - g_{11}(g_{11})_2 + g_{12}(g_{11})_1}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{g_{22}(g_{11})_2 - g_{12}(g_{22})_1}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{g_{11}(g_{22})_1 - g_{12}(g_{11})_2}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}\end{aligned}\quad [17]$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2g_{22}(g_{12})_2 - g_{22}(g_{22})_2 + g_{12}(g_{22})_2}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{g_{11}(g_{12})_2 - 2g_{12}(g_{12})_2 + g_{12}(g_{22})_1}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

de esta manera tenemos las ecuaciones de Gauss

$$\begin{aligned} x_{11} &= \Gamma_{11}^1 x_1 + \Gamma_{11}^2 x_2 + b_{11} U \\ x_{12} &= \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + b_{12} U \\ x_{22} &= \Gamma_{22}^1 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_2 + b_{22} U \end{aligned} \quad [18]$$

y las de Weingarten:

$$\begin{aligned} U_1 &= \beta_1^1 x_1 + \beta_1^2 x_2 \\ U_2 &= \beta_2^1 x_1 + \beta_2^2 x_2 \end{aligned} \quad [19]$$

Estas ecuaciones podemos ponerlas de una forma simplificada con los tensores

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha x_\alpha + b_{ij} U \quad [20]$$

$$U_i = \beta_i^\alpha x_\alpha \quad [21]$$

Realizando el producto escalar de las ecuaciones de Gauss por  $x_k$  se tendrá,

$$x_{ij} x_k = \Gamma_{ij}^\alpha (x_\alpha x_k) = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k} \quad [22]$$

Las magnitudes

$$\Gamma_{ijk} = x_{ij} x_k \quad [23]$$

así definidas se denominan símbolos de Christoffel de primera especie.

Definamos  $g^{\alpha j}$  como

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{|g|} \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{|g|} = \frac{-g_{21}}{|g|} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{|g|}$$

donde

$$|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

y se cumple que

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j,$$

donde  $\delta_i^j$  es la delta de Kronecker; se deduce, por otra parte, que:

$$\Gamma_{ij\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \delta_{\alpha}^k = \Gamma_{ij}^k$$

de modo que los símbolos de Christoffel de primera especie están relacionados con los de segunda especie de la manera siguiente

$$\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \quad \text{y} \quad \Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ijk} \quad [24]$$

Derivando  $g_{ij}$  respecto de  $u^k$  se tiene

$$x_{ij} x_k = \Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = x_{ik} x_j + x_i x_{jk}$$

en consecuencia aplicando la definición (23) se tiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \quad [25]$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} \quad [26]$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk} \quad [27]$$

Puesto que  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \quad \forall i, j, k$  sumando (26) y (27) y restando (25)

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2\Gamma_{ijk}$$

así los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie quedan expresados en función de las derivadas de las componentes del tensor métrico de la forma siguiente

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right] \quad [28]$$

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left[ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right] \quad [29]$$

### 1.5 TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

De las ecuaciones de Weingarten (21),

$$U_i = \beta_i^\alpha x_\alpha \quad \alpha, i = 1, 2$$

multiplicando por  $x_j$

$$-b_{ij} = U_i x_j = \beta_i^\alpha x_\alpha x_j = \beta_i^\alpha g_{\alpha j}$$

y definiendo  $b_i^j = b_{i\alpha} g^{\alpha j}$  se deduce aplicando (23),

$$b_i^j = b_{i\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha g_{\alpha\gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha \delta_\alpha^j = -\beta_i^j$$

Llegamos a que las ecuaciones (21) se pueden escribir así

$$U_i = -b_i^\alpha x_\alpha \quad [30]$$

donde  $b_i^j$  y  $b_{ij}$  se relacionan por

$$b_i^j = g^{\alpha j} b_{i\alpha} \quad \text{y} \quad b_{ij} = g_{\alpha j} b_i^\alpha \quad [31]$$

Se definen los símbolos de Riemann de segunda clase por

$$R_{mijk} = b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} \quad [32]$$

y sus asociados los símbolos de Riemann de primera clase por

$$R_{ijk}^p = g^{\alpha p} R_{\alpha ijk} \quad [33]$$

$R_{mijk}$  son las componentes de un tensor covariante de cuarto orden y  $R_{ijk}^p$  es un tensor mixto de cuarto orden, covariante de tercer orden, contravariante de primero.  $R_{mijk}$  es hemisimétrico respecto de los dos primeros y los dos últimos índices, como se ve en (32), es decir,

$$R_{imjk} = -R_{mijk} \quad \text{y} \quad R_{mikj} = -R_{mijk} \quad [34]$$

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21} = b \quad [35]$$

$$R_{1221} = R_{2112} = b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11} = -b \quad [36]$$

Para relacionar el tensor de Riemann  $R_{1212}$  con la curvatura de Gauss  $K$ , que será una relación básica en este estudio, veamos sucintamente el Teorema egregium de Gauss

El enunciado es: La curvatura gaussiana de una superficie de clase  $\geq 3$  es sólo función de los coeficientes de la primera forma fundamental (y sus derivadas). Aunque los tensores de curvatura (32) son funciones de los coeficientes de la segunda forma fundamental, se pueden expresar sólo en función de los coeficientes de la primera (y sus derivadas).

Como se supone que los coeficientes de las ecuaciones de Gauss, (20), son de clase  $C^1$ , es posible calcular sus derivadas cruzadas, del siguiente modo, utilizando (30)

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{ij}}{\partial u^k} &= x_{ijk} = \left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k x_\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha x_{\alpha k} + \left( b_{ij} \right)_k U + b_{ij} U_k = \\ &= \left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k x_\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha \left( \Gamma_{\alpha k}^\beta x_\beta + b_{\alpha k} U \right) + \left( b_{ij} \right)_k U + b_{ij} \left( -b_k^\alpha x_\alpha \right) \\ &= \left[ \left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - b_{ij} b_k^\alpha \right] x_\alpha + \left[ \Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + \left( b_{ij} \right)_k \right] U\end{aligned}\quad [37]$$

análogamente

$$x_{ikj} = \left[ \left( \Gamma_{ik}^\alpha \right)_j + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - b_{ik} b_j^\alpha \right] x_\alpha + \left[ \Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} + \left( b_{ik} \right)_j \right] U\quad [38]$$

Las derivadas de tercer orden son independientes del orden en que se ejecute la derivación  $x_{ijk} = x_{ikj}$ ,  $i, k, j = 1, 2$ ; en efecto

$$\begin{aligned}x_{ijk} - x_{ikj} &= \left[ \left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k - \left( \Gamma_{ik}^\alpha \right)_j + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - \right. \\ &\quad \left. - b_{ij} b_k^\alpha + b_{ik} b_j^\alpha \right] x_\alpha + \left[ \Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + \left( b_{ij} \right)_k - \Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} - \right. \\ &\quad \left. - \left( b_{ik} \right)_j \right] U = 0\end{aligned}\quad [39]$$

Puesto que  $x_1$ ,  $x_2$  y  $U$  son independientes, la ecuación (39) equivale a

$$\begin{aligned}\left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k - \left( \Gamma_{ik}^\alpha \right)_j + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - b_{ij} b_k^\alpha + \\ + b_{ik} b_j^\alpha = 0 \quad \alpha, i, j, k = 1, 2\end{aligned}\quad [40]$$

$$\Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} - \left( b_{ij} \right)_k - \Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} - \left( b_{ik} \right)_j = 0\quad [41]$$

Las ecuaciones (41) conducen a las de Mainardi-Codazzi, que no utilizaremos aquí.

Con (31), (32) y (33) tenemos

$$R_{ijk}^{\alpha} = g^{\alpha p} (b_{ik} b_{ja} - b_{ij} b_{ka}) = b_{ik} b_{ja}^p - b_{ij} b_{ka}^p$$

y entonces la ecuación (40) puede escribirse del siguiente modo

$$R_{ijk}^{\alpha} = \left( \Gamma_{ik}^{\alpha} \right)_j - \left( \Gamma_{ij}^{\alpha} \right)_k + \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad \alpha, i, j, k = 1, 2 \quad [42]$$

Multiplicando (33) por  $g_{\alpha m}$  en ambos miembros

$$g_{\alpha m} R_{ijk}^p = g_{\alpha m} g^{\alpha p} R_{\alpha ijk} = \delta_m^p R_{\beta ijk} = R_{mijk} \quad [43]$$

luego según (33) y (43) la (42) equivale a

$$R_{mijk} = g_{\alpha m} R_{ijk}^{\alpha} = g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ik}^{\alpha} \right)_j - g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ij}^{\alpha} \right)_k + g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - g_{\alpha m} \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad [44]$$

Ya que  $R_{pijk}$  es hemisimétrico (34) y aplicando (35) y (36) se deduce que la ecuación (42) se puede poner

$$R_{1212} = g_{\alpha 1} \left( \Gamma_{22}^{\alpha} \right)_1 - g_{\alpha 1} \left( \Gamma_{21}^{\alpha} \right)_2 + g_{\alpha 1} \Gamma_{22}^{\beta} \Gamma_{\beta 1}^{\alpha} - g_{\alpha 1} \Gamma_{21}^{\beta} \Gamma_{\beta 2}^{\alpha} \quad \alpha, i, j, k = 1, 2$$

Desarrollando y agrupando términos semejantes

$$R_{1212} = g_{11} \left[ \left( \Gamma_{22}^1 \right)_1 - \left( \Gamma_{21}^1 \right)_2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 \right] + g_{21} \left[ \left( \Gamma_{22}^2 \right)_1 - \left( \Gamma_{21}^2 \right)_2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 \right]$$

Utilizando (42) y (43) se tiene

$$R_{mijk} = g_{\alpha m} R_{ijk}^{\alpha} = g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ik}^{\alpha} \right)_j - g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ij}^{\alpha} \right)_k + g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha} - g_{\alpha m} \Gamma_{ij}^{\beta} \Gamma_{\beta k}^{\alpha} \quad \alpha, i, j, k = 1, 2$$

derivando a  $g_{ij} = x_i x_j$  respecto a  $u^k$  resulta

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = x_{ik} x_{j\cdot} + x_{i\cdot} x_{jk}$$

y por definición de  $\Gamma_{ijk}$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

utilizando (24) y (46) se obtiene

$$g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ik}^\alpha \right)_j = \left( g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^\alpha \right)_j - (g_{\alpha m}) \Gamma_{ik}^\alpha = \left( \Gamma_{ikm} \right)_j - (\Gamma_{\alpha jm} + \Gamma_{mj\alpha}) \Gamma_{ik}^\alpha \quad [47]$$

Análogamente

$$g_{\alpha m} \left( \Gamma_{ij}^\alpha \right)_k = \left( \Gamma_{ijm} \right)_k - (\Gamma_{\alpha km} + \Gamma_{mk\alpha}) \Gamma_{ij}^\alpha \quad [48]$$

Además,

$$g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha = \Gamma_{ik}^\beta g_{\alpha m} \Gamma_{\beta j}^\alpha = \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta jm} \quad [49]$$

y en forma parecida

$$g_{\alpha m} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha = \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta km} \quad [50]$$

De modo que sustituyendo (47), (48), (49) y (50) en (45) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{mijk} &= \left( \Gamma_{ikm} \right)_j - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha jm} - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{mj\alpha} - \left( \Gamma_{ijm} \right)_k + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha km} + \\ &\quad + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{mk\alpha} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta jm} - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta km} \\ R_{mijk} &= \left( \Gamma_{ikm} \right)_j - \left( \Gamma_{ijm} \right)_k + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{mk\alpha} - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{mj\alpha} \end{aligned} \quad [51]$$

En concreto para las superficies del espacio ordinario las únicas componentes no nulas del tensor covariante de curvatura son  $R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$  ya que según (35) y (36) si tiene los dos primeros o los dos últimos subíndices repetidos el tensor vale cero.

$R_{1212}$  es el tensor de Riemann-Christoffel buscado, sustituyendo en (51) tenemos

$$R_{1212} = \frac{\partial}{\partial u^1} \Gamma_{221} - \frac{\partial}{\partial u^2} \Gamma_{211} + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{12\alpha} - \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{11\alpha} \quad [52]$$



Que se puede sustituir a través de (35) en la fórmula que nos da la curvatura de Gauss (5)

$$K = \frac{R_{1212}}{g} \quad [53]$$

Puesto que los símbolos de Christoffel sólo dependen de las componentes del tensor métrico y sus derivadas, lo mismo ocurre con la curvatura. Esto es lo que se quería demostrar. La relación (53) es la llamada condición de curvatura.

#### 1.6 METODO ISOPARAMETRICO

Consideremos dos superficies S y T y dos sistemas de coordenadas  $u^i$  y  $v^i$  tales que: S está dada por  $x = x(u^i)$  y T está dada por  $x^* = x^*(v^i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Las  $u^i$ ,  $v^i$  cumplen las dos condiciones mencionadas anteriormente (regularidad y curvatura).

La representación de una región de S sobre la correspondiente de T queda establecida por la transformación

$$u^i = u^i(v^k) \quad [54]$$

o la inversa

$$v^k = v^k(u^i) \quad i, k = 1, 2$$

Las  $u^i$  son funciones uniformes con derivadas parciales continuas tales que el determinante funcional Jacobiano es distinto de cero

$$\left| \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \right| \neq 0 \quad \left| \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \right| \neq 0$$

Si utilizamos  $u^i = u^i(v^k)$  para transformar las coordenadas  $v^k$  de T en las  $u^i$ , resulta la ecuación de T en la forma:

$$x^* = x^*(u^i)$$

Dos puntos de S y T que se corresponden en la representación se designan por los mismos valores de  $u^i$

$$x = x(u^i) \quad x^* = x^*(u^i) \quad [54]$$

Esto es conocido como **método isoparamétrico** y fue aplicado por primera vez por O'Keefe (O'Keefe, 1953). La base matemática se encuentra en Levi-Civita (Levi-Civita 1927), en el capítulo VIII discute la relación entre dos elementos lineales diferentes aplicados a la misma variedad; en una nota introductoria a dicho capítulo considera un mapa y la superficie de la Tierra como dos variedades con diferentes métricas, una euclídeana y la otra no, de manera que para todo par de valores,  $\varphi$  (para la latitud),  $\lambda$  (para la longitud), corresponde un punto en el mapa y un punto en la Tierra. Para O'Keefe las dos variedades son dos esferoides distintos, le llamó isoparamétrico por utilizarse el mismo parámetro sobre las dos variedades.

Esta es una de las muchas formas de hacer corresponder dos variedades y no se pierde generalidad por utilizar ésta en concreto. De hecho nosotros consideraremos  $u^i$ , como los parámetros a utilizar sobre ambas superficies, que en nuestro caso serán el plano y la esfera. Varios ejemplos de la eficacia de este método se verá en la sección 3.3.

#### 1.7 DESARROLLO DE $g_{kh}$ . COEFICIENTES DE CHOVITZ. PROBLEMA DIRECTO

Teniendo en cuenta que  $S$  es una superficie suficientemente lisa y la regularidad del sistema de coordenadas podemos tomar para cada elemento de  $G = (g_{ij})$  un desarrollo en serie de Taylor del tipo

$$g_{kh} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^i}{\partial (u^1)^i} \frac{\partial^j}{\partial (u^2)^j} g_{kh} \right]_{(0,0)} (u^1)^i (u^2)^j, i, j=0, 1, 2, \dots \quad [55]$$

Este es el desarrollo de Taylor de  $g_{ij}$  en  $u^i$  en un entorno del punto origen (0,0).

Los primeros términos del desarrollo (55) pueden escribirse en la forma

$$g_{kh} = a_{kh}^{00} + a_{kh}^{10} u^1 + a_{kh}^{01} u^2 + a_{kh}^{20} (u^1)^2 + 2a_{kh}^{11} u^1 u^2 + a_{kh}^{02} (u^2)^2 + \dots$$

donde,

$$a_{kh} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^i}{\partial (u^1)^i} \frac{\partial^j}{\partial (u^2)^j} g_{kh} \right]_{(0,0)} \quad [56]$$

son los coeficientes de Chovitz (Chovitz, 1952), son los coeficientes del desarrollo de Taylor calculados en el punto (0,0). Puesto que este desarrollo es único para una familia particular de coordenadas  $u^i$ , la elección de  $u^i$  determina de manera única los valores  $a_{kh}^{ij}$ .

En forma matricial podemos poner

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}^{00} \\ a_{00}^{11} \\ a_{00}^{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10}^{10} & a_{01}^{01} \\ a_{10}^{11} & a_{01}^{11} \\ a_{10}^{12} & a_{01}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}^{20} & a_{11}^{11} & a_{02}^{02} \\ a_{20}^{11} & a_{11}^{11} & a_{02}^{11} \\ a_{20}^{12} & a_{11}^{12} & a_{02}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u^1)^2 \\ 2u^1u^2 \\ (u^2)^2 \end{pmatrix} + \dots$$

O en forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} g_{kh} \end{pmatrix} = A_0 + A_1(u^i) + A_2(u^i)^2 + \dots \quad [57]$$

siendo  $A_m = (a_{kh}^{ij}) \quad m = i + j$

Los subíndices de A indican el orden de los términos que contiene dicha matriz. Estas matrices resultarán muy cómodas, centrandose el interés en  $A_2$  como se verá más tarde.

El desarrollo en serie muestra que  $g_{ij}$  es función de  $u^i$  y que los  $a_{kh}^{ij}$  no lo son. Debido a su independencia las matrices  $A_m$  resultan atractivas.

Dada una familia de coordenadas  $u^i$  el desarrollo es único, luego las matrices  $A_m$  se determinan de manera única.

### 1.8 CALCULO DE LA REPRESENTACION CONOCIDOS LOS COEFICIENTES. PROBLEMA INVERSO

Dadas las ecuaciones (54) de la representación es posible calcular los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$  y, por tanto, determinar las matrices  $A_m$

sin más que calcular el tensor  $g_{ij}$  y desarrollar en serie, según se indicó en la sección 1.7.

Si se especifica una dirección inicial es posible resolver el problema inverso, es decir, establecer las coordenadas  $u^i$  dadas las matrices  $A_m$ .

Si consideramos  $u^i$  una función del arco de geodésica  $s$  que parta del origen, entonces podemos escribir el desarrollo alrededor del punto  $(0,0)$

$$u^i = u^i(0,0) + \left( \frac{du^i}{ds} \right)_{(0,0)} s + \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} \right)_{(0,0)} \frac{s^2}{2!} + \left( \frac{d^3 u^i}{ds^3} \right)_{(0,0)} \frac{s^3}{3!} + \dots \quad [58]$$

Vamos a tratar de expresar  $\frac{d^k u^j}{ds^k}$ , para  $k \geq 2$ , en función de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$ .

A lo largo del arco de geodésica se supone un triedro  $(t, b, U)$  con sentido positivo (dextrorsum),  $b$  es un vector unitario perpendicular a  $t$  y  $U$ , definidos en el apartado 1.6.

Partiendo de las ecuaciones de la página 229 del Struik (Struik, 1955), que otros autores llaman fórmulas de Frenet generalizadas (Tonolo, 1939) y (Marusi, 1950)

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= k_g b + k_n U \\ \frac{db}{ds} &= -k_g t - \tau_g U \\ \frac{dU}{ds} &= -k_n t + \tau_g b \end{aligned} \quad [59]$$

donde  $k_n$  y  $k_g$  son los módulos de los vectores correspondientes definidos en el apartado 1.3 y  $\tau_g$  se define como  $b \frac{dU}{ds}$  y se conoce como torsión geodésica, para lo que nos proponemos sólo necesitamos las dos primeras ecuaciones de (59). Sea el vector  $x^i$  el vector tal que

$$x^i x_j = \delta_j^i$$

donde  $\delta_j^i$  es la delta de Kronecker. Dado un vector cualquiera  $u$  sobre la superficie se verificará

$$u x_k = u_k \quad u x^k = u^k$$

$$u = u_k x^k$$

$$u = u^k x_k$$

$u_k$  es la componente covariante de  $u$  y  $u^k$  es la componente contravariante. Indicaremos por  $\lambda^i$  y  $\nu^i$  las componentes contravariantes de  $t$  y  $b$  respectivamente.

$$\lambda^i = t x^i = \frac{du^i}{ds} \quad \nu^i = b x^i \quad [60]$$

$$t = \lambda^i x_i \quad b = \nu^i x_i \quad [61]$$

derivando respecto de  $s$  las ecuaciones (61) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d\lambda^i}{ds} x_i + \frac{du^j}{ds} \frac{dx_j}{ds} \\ \frac{db}{ds} &= \frac{d\nu^i}{ds} x_i + \nu^j \frac{dx_j}{ds} \end{aligned}$$

multiplicando por  $x^i$  y operando

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} x^i &= \frac{d\lambda^i}{ds} + \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} x_{jh} x^i \\ \frac{db}{ds} x^i &= \frac{d\nu^i}{ds} + \nu^j \frac{du^h}{ds} x_{jh} x^i \end{aligned}$$

Multiplicando por  $x_k x^k$  y sustituyendo (22) queda

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} x^i &= \frac{d\lambda^i}{ds} + \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \Gamma_{jk}^i \\ \frac{db}{ds} x^i &= \frac{d\nu^i}{ds} + \nu^j \frac{du^h}{ds} \Gamma_{jk}^i \end{aligned} \quad [62]$$

Se deriva (60)

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^i}{ds} &= \frac{dt}{ds} x^i + t \frac{dx^i}{ds} \\ \frac{d\nu^i}{ds} &= \frac{db}{ds} x^i + b \frac{dx^i}{ds} \end{aligned} \quad [63]$$

Se sustituye (63) en (62)

$$\begin{aligned}
t \frac{dx^i}{ds} &= - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \\
b \frac{dx^i}{ds} &= - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds}
\end{aligned}
\quad [64]$$

Multiplicando por  $x^i$  en (59) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{ds} x^i &= k_g b x^i + k_n U x^i \\
\frac{db}{ds} x^i &= -k_g t x^i - \tau_g U x^i
\end{aligned}$$

ya que  $U$  y  $x^i$  son ortogonales  $U x^i = 0$ , de esta manera

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{ds} x^i &= k_g b x^i \\
\frac{db}{ds} x^i &= -k_g t x^i
\end{aligned}
\quad [65]$$

Sustituyendo (64) y (65) en (63) llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda^i}{ds} &= k_g \nu^i - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \\
\frac{d\nu^i}{ds} &= -k_g \lambda^i - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds}
\end{aligned}$$

ya que trabajamos con líneas geodésicas  $k_g = 0$  y queda

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda^i}{ds} &= - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \\
\frac{d\nu^i}{ds} &= - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds}
\end{aligned}
\quad [66]$$

Utilizando (60) la primera de las ecuaciones (66) se puede poner

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} = - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds}
\quad [67]$$

Calculamos ahora la tercera derivada

$$\frac{d^3 u^i}{ds^3} = - \frac{d}{ds} \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} - \Gamma_{jh}^i \frac{d^2 u^j}{ds^2} \frac{du^h}{ds} - \Gamma_{jh}^i \frac{du^j}{ds} \frac{d^2 u^h}{ds^2}$$

sustituyendo (67) y operando queda

$$\frac{d^3 u^i}{ds^3} = \left( 2 \Gamma_{hr}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial u^k} \right) \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds} \quad [68]$$

Sustituyendo (67) y (68) en el desarrollo (58) resulta

$$u^i = \left( \frac{du^i}{ds} \right)_{(0,0)} s - \left( \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right)_{(0,0)} \frac{s^2}{2!} + \left[ \left( 2\Gamma_{hr}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial u^k} \left( \Gamma_{jh}^i \right) \right) \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds} \right]_{(0,0)} \frac{s^3}{3!} + \dots [69]$$

Para poder determinar los coeficientes de Taylor para  $u^i$  es necesario conocer  $\frac{du}{ds}$ , que son las componentes de una dirección inicial, y  $\Gamma_{jk}^i$  que son los símbolos de Christoffel de segunda especie y están compuestos de combinaciones de  $a_{kh}^{ij}$ , como se desprende de (17). En consecuencia, podemos decir sin ambigüedad que puede ser determinada una familia de parámetros  $u^i$ , establecidos un origen y una dirección inicial, a partir de unos  $a_{kh}^{ij}$  cualesquiera que cumplan las condiciones de regularidad y curvatura, es decir,  $ds^2$  positivo y que se verifique la ecuación de Gauss (53). Los  $a_{kh}^{ij}$  están sujetos a estas condiciones porque lo está el tensor  $g_{ij}$ .

#### Regularidad.

Esta propiedad significa que trabajamos con superficies donde la longitud de arco es real y positiva, es decir, (1), (2) y (3) de 1.4. Para que  $ds^2 > 0$  es necesario que  $g > 0$  y  $g_{11}, g_{22} > 0$ , (Struik, 1955)

Evaluamos esto aplicando el desarrollo (55) y obtenemos:

$$a_{11}^{00} a_{22}^{00} - (a_{12}^{00})^2 > 0 \quad a_{11}^{00}, a_{22}^{00} > 0 \quad [70]$$

#### Curvatura.

Como ya se ha dicho, sólo se consideran las propiedades intrínsecas de la superficie, su curvatura puede ser representada por una función escalar de punto,  $K = K(P)$ , independiente del sistema de coordenadas.

Ejemplos:

(1)	K = constante	Esfera
(2)	0	caso límite de (1): Plano
(3)	1/ρv	Elipsoide

(ρ, v son los radios de curvatura del meridiano y del primer vertical respectivamente en el elipsoide)

La condición de curvatura es conocida como ecuación de Gauss (5) o (53). Se necesita expresar en (53) el tensor de Riemann en función de los  $a_{kh}^{ij}$ , utilizando (28), (29) y (52) resulta

$$\begin{aligned}
 R_{1212} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) - \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} \right) + \Gamma_{21}^{\alpha} \Gamma_{12\alpha} - \Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{11\alpha} = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^2 \partial u^1} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^1 \partial u^2} \right) + \\
 &+ \Gamma_{21}^{\alpha} \Gamma_{12\alpha} - \Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{11\alpha} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right) + \\
 &+ g^{\alpha\eta} \Gamma_{21h} \Gamma_{12\alpha} - g^{\alpha\eta} \Gamma_{22\alpha} \Gamma_{11\alpha} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^2 \partial u^2} + \right. \\
 &\left. + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right) + \frac{g^{1j} (\Gamma_{211} \Gamma_{12j} - \Gamma_{221} \Gamma_{11j})}{\cdot} = (*)
 \end{aligned}$$

Efectuando las operaciones resultan los siguientes términos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^1 \partial u^2} &= 2a_{12}^{11} + \dots, \quad \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u^2 \partial u^2} = 2a_{12}^{02} + \dots, \quad \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} = 2a_{22}^{20} + \dots \\
 &\cdot g^{1j} (\Gamma_{211} \Gamma_{12j} - \Gamma_{221} \Gamma_{11j}) = g^{11} \Gamma_{211} \Gamma_{121} + g^{12} \Gamma_{211} \Gamma_{122} +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + g^{21} \Gamma_{212} \Gamma_{121} + g^{22} \Gamma_{212} \Gamma_{122} - g^{11} \Gamma_{221} \Gamma_{111} - g^{12} \Gamma_{221} \Gamma_{112} - \\
& - g^{21} \Gamma_{222} \Gamma_{111} - g^{22} \Gamma_{222} \Gamma_{112} = \frac{1}{g} \left( \frac{a_{22}^{00} a_{11}^{01} a_{11}^{01}}{4} - \right. \\
& - \frac{a_{12}^{00} a_{11}^{01} a_{22}^{10}}{4} + \frac{a_{12}^{00} a_{22}^{10} a_{11}^{01}}{4} + \frac{a_{11}^{00} a_{22}^{10} a_{22}^{10}}{4} - \\
& - \frac{a_{22}^{00} (a_{12}^{01} - \frac{1}{2} a_{22}^{10}) a_{11}^{10}}{2} - \frac{a_{12}^{00} (a_{12}^{01} - \frac{1}{2} a_{22}^{10}) (a_{12}^{10} - \frac{1}{2} a_{11}^{01})}{1} - \\
& \left. - \frac{a_{12}^{00} a_{22}^{01} a_{11}^{10}}{4} - \frac{a_{11}^{00} (a_{12}^{10} - \frac{1}{2} a_{11}^{01}) a_{22}^{01}}{2} \right) = \dots
\end{aligned}$$

En definitiva la curvatura de Gauss vale

$$K_0 = \frac{R_{1212}}{g} = \frac{(\#)}{g} = \frac{2a_{12}^{11} - a_{11}^{02} - a_{22}^{20}}{a_{11}^{00} a_{22}^{00} - (a_{12}^{00})^2} + \frac{1}{(a_{11}^{00} a_{22}^{00} - (a_{12}^{00})^2)^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} \text{términos incluidos en todos} \\ \text{los sumandos con } i+j=1 \end{array} \right]_{a_{kh}^{ij}} \quad [71]$$

$K_0$  es el valor de  $K$  en el origen.

(70) y (71) son las únicas condiciones que los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$  deben necesariamente satisfacer en la vecindad del origen para que exista correspondencia isométrica entre las dos superficies. Otras restricciones que puedan introducirse en  $a_{kh}^{ij}$  dependerán de la naturaleza del problema a resolver. Cuando particularicemos el problema en la siguiente sección, indicaremos los grados de libertad.

Resumiendo, podemos elegir unos coeficientes  $a_{kh}^{ij}$  sujetos a las relaciones (58) y (59), y como en función de los  $a_{kh}^{ij}$  se determinan las  $u^i$ , tendremos definida una correspondencia entre las dos superficies  $S$  y  $T$ .

### 1.9 RESENTACION DE LA ESFERA EN EL PLANO

En principio por este método se puede representar una superficie arbitraria sobre otra, el geoide sobre el elipsoide (Bozzi y

Gregori, 1966), un elipsoide sobre otro elipsoide (Chovitz, 1956), etc. este último con la teoría de segundo orden. Particularicemos para una esfera (superficie S con  $K>0$ ) y un plano (superficie T con  $K=0$ ). Tomemos, desde ahora, como  $v^i$  las coordenadas cartesianas (x,y) en el plano y como  $u^i$  las coordenadas (u,v) en la esfera. De este modo:

$$\begin{aligned} ds_S^2 &= g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2 \\ ds_T^2 &= dx^2 + dy^2 \end{aligned} \quad [72]$$

son los elementos lineales en la esfera y en el plano, respectivamente, utilizando los mismos parámetros en ambos.

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}$$

son las coordenadas en la esfera con significado cartográfico.

$\{g_{ij}\}$  es el tensor métrico de la esfera en función de las coordenadas cartesianas del plano.

Introducimos una condición a efectos prácticos: "isometría en un punto dado que tomaremos como origen". Isometría, en general, significa perfecta correspondencia o perfecto mapeo (Sevilla, 1986), deja invariantes los ángulos y las distancias a la vez; los coeficientes del tensor métrico son los mismos para las dos superficies. Esto no es posible cuando las curvaturas de las superficies son distintas, como en nuestro caso. Según el teorema de Gauss dos entornos cualesquiera, suficientemente pequeños, de superficies que tengan igual curvatura gaussiana constante son isométricos. Esto significa que una dirección escogida de manera arbitraria en una de las superficies se puede hacer corresponder con una dirección cualquiera en la otra, intuitivamente que cualquier figura geométrica situada en una superficie de curvatura gaussiana constante se puede trasladar y girar libremente sin que varíen las longitudes de las curvas.

En S en general  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \neq 0$  y  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y} \neq 0$  pero podemos forzar la condición  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x} = 0$  y  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y} = 0$  en un punto particular. Esto implica que en este punto cada componente de  $g_{ij}$  es una constante. Si  $g_{ij} = \delta_{ij}^j$  donde  $\delta_{ij}^j$  es la delta de Kronecker, tendremos coordenadas cartesianas

locales. El origen del sistemas es, como se ha dicho, usualmente tomado en el punto de isometría, entonces

$$A_0 = (1 \ 0 \ 1)^T. \quad [72]$$

También se puede imponer isometría a lo largo de una línea. Si suponemos coordenadas cartesianas localmente la regularidad no supone información adicional, pues (70) resulta como consecuencia de la isometría en el origen  $\left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \right)_{(0,0)} = 0$  y  $\left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} \right)_{(0,0)} = 0$ , de donde

$$A_1 = (0) \quad \text{ya que } a_{hk}^{ij} = 0 \text{ para } i + j = 1 \quad [73]$$

Para lo que nos proponemos será suficiente desarrollar el tensor hasta los términos de segundo grado, que quedará con las restricciones (73) de la forma:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + a_{11}^{20} x^2 + 2a_{11}^{11} x y + a_{11}^{02} y^2 + \dots \\ g_{12} &= a_{12}^{20} x^2 + 2a_{12}^{11} x y + a_{12}^{02} y^2 + \dots \\ g_{22} &= 1 + a_{22}^{20} x^2 + 2a_{22}^{11} x y + a_{22}^{02} y^2 + \dots \end{aligned} \quad [74]$$

En forma matricial

$$g_{kh} = A_0 + A_2 (u^1)^2 + \dots$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{20} & a_{11}^{11} & a_{11}^{02} \\ a_{12}^{20} & a_{12}^{11} & a_{12}^{02} \\ a_{22}^{20} & a_{22}^{11} & a_{22}^{02} \end{pmatrix} \text{ y } (u^1)^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Con la restricción al segundo orden la (71) quedara:

$$K_0 = 2 a_{12}^{11} - a_{11}^{02} - a_{22}^{20} \quad [75]$$

siendo  $K_0$  la curvatura de Gauss en el origen.

Esto significa que de los nueve términos de la matriz  $A_2$  a nuestra disposición en el desarrollo (74) sólo ocho pueden ser tomados independientemente.

#### 1.10 PROPIEDADES DE LAS PROYECCIONES CARTOGRAFICAS EN TERMINOS DE LA MATRIZ $A_2$

Una proyección cartográfica va a ser cualquier representación isoparamétrica de la esfera en el plano, en el sentido que lo definía Levi-Civita en la sección 1.10. Para nuestro estudio vamos a limitar la representación a una porción de esfera alrededor del origen, donde supondremos que tiene isometría. No se consideran singularidades como la de la proyección Mercator en las regiones polares.

Luego cogiendo un sistema de coordenadas  $(u,v)$  en  $S$ , tal que

$$\begin{aligned}u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y)\end{aligned}$$

tenemos definida una proyección cartográfica, por ejemplo:

1) Tomamos

$$\begin{aligned}u &= x & -90 < u < 90 \\ v &= y & -180 < v < 180\end{aligned}$$

donde  $u$  y  $v$  son la latitud y longitud en la esfera, se consideran los paralelos ( $v = \text{cte.}$ ) igualmente espaciados. La proyección así definida es la Plate Carrée que se ve en la sección 3.7.4.

2) Tomamos ahora

$$\begin{aligned}-180 < u < +180 \\ -90 < v < +90\end{aligned}$$

En este caso consideramos las líneas ( $v = \text{cte.}$ ) igualmente espaciadas. Esta es la proyección de Cassini-Soldner que se ve en 3.7.6.

En resumen, una gran variedad de proyecciones pueden ser obtenida a partir de la adecuada elección de las coordenadas  $(u,v)$  en  $S$ .

Nos proponemos obtener una clasificación general de las proyecciones cartográficas según la matriz  $A_2$ . Veamos como afecta a dicha matriz las propiedades de las proyecciones cartográficas.

### Simetría axial

Esta propiedad la tienen la mayoría de las proyecciones. Consiste en que se exhiben las mismas propiedades a ambos lados de un eje de coordenadas. La distancia del origen a los puntos  $(\pm x_0, \pm y_0)$  debe ser la misma. Esto se cumple poniendo:

$$a_{11}^{11} = a_{22}^{11} = a_{12}^{02} = a_{12}^{20} = 0$$

Sustituyendo (74) en el elemento lineal de la sección 1.2 se ve directamente que la anulación de estos coeficientes es la condición necesaria y suficiente para la simetría axial. En forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{20} & 0 & a_{11}^{02} \\ 0 & a_{12}^{11} & 0 \\ a_{22}^{20} & 0 & a_{22}^{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [76]$$

### Conformidad

La representación conforme es aquella que conserva los ángulos. Cuando conserva las magnitudes de los ángulos pero no necesariamente el sentido se llama isogonal.

TEOREMA: Una representación es conforme si y sólo si existe proporcionalidad entre los elementos de arco correspondientes a puntos homólogos, (Driencourt et Laborde, 1932). Como en el plano es  $g_{11} = g_{22} = 1$  y  $g_{12} = 0$  debe resultar en la esfera por el teorema anterior  $g_{11} = g_{22}$  y  $g_{12} = 0$  ya que el cruce de las líneas coordenadas es de  $90^\circ$  y debe conservarse por la proyección inversa sobre la esfera. Traduciendo esto en términos de la matriz  $A_2$ , nos queda el desarrollo:

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{20} & a_{11}^{12} & a_{11}^{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{22}^{20} & a_{22}^{12} & a_{22}^{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [77]$$

$$a_{11}^{ij} = a_{22}^{ij} \quad y \quad a_{12}^{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que toda figura

infinitamente pequeña de la esfera se transforma en una figura semejante en el plano.

Un estudio de las condiciones necesarias y suficientes que una representación debe satisfacer para que sea conforme está en Mainardi (Mainardi 1972) y ciertos teoremas importantes en Bocchio (Bocchio, 1978) y Sevilla (Sevilla, 1986).

La representación conforme goza de gran aceptación en geodesia y es la que casi exclusivamente se utiliza, debido a las propiedades que se acaban de citar. Pero aunque provee una buena representación para regiones pequeñas alrededor de un punto, el rápido crecimiento de las deformaciones de otro tipo al alejarnos del punto o línea de deformación cero, hace que esta proyección sea menos satisfactoria para grandes regiones (no consideramos U.T.M. y análogas que aplican otras estrategias).

#### Equivalencia

Una representación se dice **equivalente** cuando conserva las áreas.

El elemento de área en la esfera esta dado por (4) :

$$dA_s = g^{1/2} dx dy$$

y en el plano por

$$dA_T = dx dy.$$

Como se deben conservar las áreas  $dA_s = dA_T$ , de donde  $g = 1$  y como

$$g = 1 + \left( a_{11}^{20} + a_{22}^{20} \right) x^2 + 2 \left( a_{11}^{11} + a_{22}^{11} \right) xy + \left( a_{11}^{02} + a_{22}^{02} \right) y^2$$

la condición al segundo orden en los  $a_{kn}^{ij}$  es

$$a_{11}^{ij} = -a_{22}^{ij}.$$

es decir.

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_{12}^{20} & a_{11}^{12} & a_{12}^{02} \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [78]$$

donde hemos puesto

$$a_{11}^{20} = a, \quad a_{11}^{12} = b, \quad a_{11}^{02} = c$$

Estas proyecciones son importantes en el campo de la distribución estadística, en mapas tales como los que muestran densidad de población, agricultura o estadística industrial. Se utilizará siempre que sea necesario que se vea una escala real de las áreas terrestres en el mapa.

Las propiedades de conformidad y equivalencia son mutuamente incompatibles.

#### Equidistancia

Es cuando se conserva la longitud a lo largo de una o ambas líneas coordenadas

a) Si es a lo largo de la línea coordenada x, entonces  $y = \text{const.}$  o  $dy = 0$  y por tanto tendremos:

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^{20} & a_{11}^{12} & a_{12}^{02} \\ a_{22}^{20} & a_{22}^{12} & a_{22}^{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [79]$$

Así se tiene  $g_{11} = 1$  y la distancia a lo largo del eje X se conserva.

b) Si es a lo largo de la línea coordenada y, entonces  $x = \text{const.}$  o  $dx = 0$  y por tanto tendremos:

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{20} & a_{11}^{12} & a_{11}^{02} \\ a_{12}^{20} & a_{12}^{12} & a_{12}^{02} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [80]$$

Equidistancia es incompatible con conformidad y equivalencia. La equidistancia es una propiedad menos valiosa que las otras dos. Porque es raro querer tener un mapa en el que puedan ser medidas las distancias correctamente sólo en una dirección. Sin embargo la equidistancia es útil si la consideramos entre conformidad y equivalencia. Las deformaciones angulares en una proyección equidistante crecen más lentamente que en una equivalente. Es por esto que se utiliza esta propiedad siempre que las otras no sean importantes, tales como en la construcción de un mapamundi o mapas estratégicos de grandes zonas de la superficie de la Tierra.

#### Simetría radial

Para definir precisamente lo que significa, haremos la transformación a coordenadas polares  $(\rho, \theta)$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2 = \\ &= d\rho^2 \{1 + \rho^2 [a_{11}^{20} \cos^4 \theta + 2(a_{11}^{11} + a_{12}^{20}) \cos^3 \theta \sin \theta + \\ &\quad + (a_{11}^{02} + 4a_{22}^{11} + a_{22}^{20}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2(a_{22}^{11} + a_{12}^{02}) \cos \theta \sin^3 \theta + \\ &\quad + a_{22}^{02} \sin^4 \theta]\} + 2\rho^2 d\rho d\theta \{a_{12}^{20} \cos^4 \theta + (2a_{12}^{11} + a_{22}^{20} - \\ &\quad - a_{11}^{20}) \cos^3 \theta \sin \theta + (2a_{22}^{11} + a_{12}^{02} - 2a_{12}^{11} - a_{12}^{20}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + (a_{22}^{02} - a_{11}^{02} - 2a_{12}^{11}) \cos \theta \sin^3 \theta - a_{12}^{02} \sin^4 \theta\} + \\ &\quad + (\rho d\theta)^2 \{1 + \rho^2 [a_{22}^{20} \cos^4 \theta + 2(a_{12}^{11} - a_{12}^{20}) \cos^3 \theta \sin \theta + \\ &\quad + (a_{22}^{02} + a_{11}^{20} - 4a_{12}^{11}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2(a_{11}^{11} - a_{12}^{02}) \cos \theta \sin^3 \theta + \\ &\quad + a_{11}^{02} \sin^4 \theta]\} \end{aligned}$$

Agrupando coeficientes podemos escribir

$$ds^2 = [1 + H\rho^2] d\rho^2 + 2I\rho^2 d\rho d\theta + [1 + J\rho^2] \rho^2 d\theta^2$$



donde H, I y J son expresiones que contienen  $a_{kh}^{ij}$  y funciones de  $\vartheta$ .

La propiedad de simetría radial implica que  $ds^2$  y por tanto H, I y J deben ser independientes de  $\vartheta$ . Entonces se tienen las condiciones

$$\begin{array}{ll}
 \text{para } g_{11} & \text{para } g_{12} \\
 a_{11}^{20} = a_{22}^{02} & a_{12}^{20} = -a_{12}^{02} \\
 a_{11}^{02} + 4a_{12}^{11} + a_{22}^{20} = 2a_{11}^{20} & 2a_{22}^{11} + a_{12}^{02} - 2a_{11}^{11} - a_{12}^{20} = 2a_{12}^{20} \\
 a_{11}^{11} + a_{12}^{20} = 0 & 2a_{12}^{11} + a_{22}^{20} - a_{11}^{20} = 0 \\
 a_{22}^{11} + a_{12}^{02} = 0 & a_{22}^{02} - a_{11}^{02} - 2a_{12}^{11} = 0 \\
 \\ 
 & \text{para } g_{22} \\
 & a_{22}^{20} = a_{11}^{02} \\
 & a_{22}^{02} + a_{11}^{20} - 4a_{12}^{11} = 2a_{22}^{20} \\
 & a_{22}^{11} - a_{12}^{20} = 0 \\
 & a_{11}^{11} - a_{12}^{02} = 0
 \end{array}$$

Algunas de las ecuaciones son redundantes, todas se reducen a las siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(I)} & a_{11}^{20} = a_{22}^{02} & a_{22}^{20} = a_{11}^{02} & a_{11}^{02} + 2a_{12}^{11} = a_{11}^{20} \\
 \text{(II)} & a_{22}^{11} = a_{12}^{20} & a_{11}^{11} = a_{12}^{02} & a_{11}^{11} + a_{22}^{11} = 0
 \end{array} \quad [81]$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & 1/2(a-c) & b \\ c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [82]$$

Los cálculos están realizados en el Apéndice I.



## 2 DEFORMACIONES = =====

### 2.1 GENERALIDADES

En el lenguaje ordinario la escala de un mapa puede ser definida como la razón de la distancia en el mapa con la distancia real en el terreno. Generalmente, también se supone que la escala es constante midamos la distancia que midamos sobre el mapa, así como que es la misma en cualquier lugar y en todas las direcciones. Basta una pequeña reflexión para ver que esto no es cierto, si el concepto de escala se relaciona con la proyección.

Puesto que la esfera y el plano no son aplicables es imposible realizar una proyección cartográfica que conserve las figuras con ángulos, áreas y longitudes a la vez (isometría). Siempre habrá deformaciones, sólo se puede crear un punto o una línea sin ellas, como se hizo antes. En los epígrafes siguientes obtendremos las expresiones de las principales deformaciones en función de los coeficientes de Chovitz, que se utilizarán en los capítulos siguientes. Así se atenderá la recomendación de Zakatov (1981) que pide sencillez y facilidad en el cálculo de las distorsiones.

Aunque las deformaciones también se producen en áreas y ángulos, es la deformación lineal la más importante al depender aquellas de ésta, como veremos a lo largo de este capítulo.

### 2.2 MODULO DE DEFORMACION LINEAL

Vamos a determinar la razón en que la escala, relación entre longitudes en el plano y esfera, puede cambiar a lo largo de una línea que es infinitamente corta, para evitar confusiones con la primera llamaremos a ésta módulo de deformación lineal o escala local.

Consideremos dos curvas, una en la esfera y otra en el plano, que se corresponden según la relación

$$\begin{aligned}x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v)\end{aligned}$$

es decir, inversa desde el punto de vista cartográfico: del plano en la esfera, ver figura:

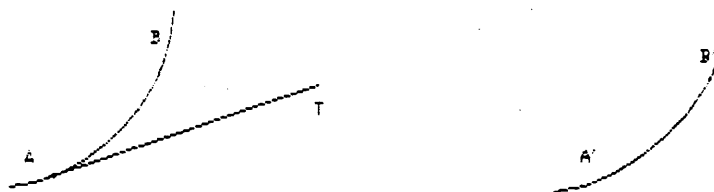


Figura 1. Transformación plano-esfera

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de la esfera,  $A'$  y  $B'$  los correspondientes del plano por  $u^1$ , y  $AT$  la tangente en  $A$  a la curva que se encuentra en la esfera. Si el punto  $B$  se aproxima indefinidamente al punto  $A$ , el punto  $B'$  se aproximará indefinidamente al punto  $A'$ , el cociente de la longitud  $A'B'$  entre  $AB$  es lo que llamamos **módulo de deformación lineal**  $m$  sobre la curva  $AB$  según la dirección  $AT$ . Veamos a continuación su expresión en función del tensor métrico para posteriormente ponerla en función de los coeficientes  $a_{kh}^{1j}$ .

Se puede decir que en todo tipo de proyección de una superficie sobre otra, existe sobre la primera superficie un sistema de líneas ortogonales tal que la proyección sobre la segunda también es ortogonal. Las dos superficies se encuentran, de esta manera, descompuestas en rectángulos infinitamente pequeños que se corresponden unos sobre los otros.

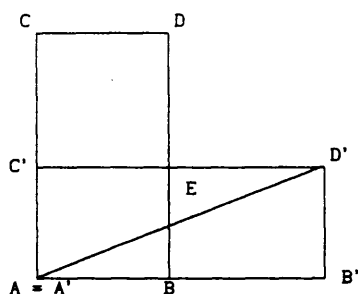


Figura 2 . Rectángulos correspondientes.

Sea D un punto infinitamente cercano de A, sobre la primera superficie, y sea ABCD uno de los rectángulos descritos en el párrafo anterior, que tiene por diagonal AD. Desplazamos la segunda superficie de manera que la proyección de los lados AB, AC caigan sobre sus representaciones en esta segunda superficie; sea entonces A'B'C'D' el rectángulo correspondiente a la representación de ABCD, llamemos E al punto de intersección de las rectas AD' y BD. Se puede considerar este punto como la proyección ortogonal de D si se girara el plano ABCD un ángulo determinado alrededor de AB. Ese ángulo depende de la razón de las líneas EB, DB; es el mismo cualquiera que sea D. Designando respectivamente por a y b los cocientes de las longitudes según las direcciones AB y AC, es decir poniendo

$$\frac{A'B'}{AB} = a, \quad \frac{A'C'}{AC} = b,$$

tenemos

$$\frac{EB}{D'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{a}, \quad \frac{DB}{D'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{b},$$

por tanto

$$\frac{EB}{DB} = \frac{b}{a}$$

De esta manera, si D se desplaza formando una figura infinitesimal trazada alrededor del punto A, esa misma figura podría obtenerse con E, girando un cierto ángulo alrededor de AB. Por otra parte, se tiene

$$\frac{A'D'}{AE} = \frac{A'B'}{AB} = a$$

de manera que el lugar de los puntos D' es homotético de los puntos E; el centro de homotecia es A, y la razón de homotecia tiene por valor a. La representación de la figura infinitesimal descrita por el punto D es pues una proyección ortogonal de esta figura hecha a una escala conveniente.

Cualquier proyección cartográfica se puede considerar compuesta por la yuxtaposición de proyecciones ortogonales de todos los elementos superficiales de la región, con tal que se haga variar una sobre la otra, y la escala y la posición del elemento con respecto al plano del mapa.

En el plano el elemento de arco es :

$$ds_T^2 = dx^2 + dy^2$$

y en la esfera

$$ds_S^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx dy + g_{22}dy^2$$

dados en (72).

La escala local, también llamada coeficiente de dilatación lineal (como se dijo antes), viene dada por

$$m = \frac{ds_T}{ds_S} = \left[ \frac{dx^2 + dy^2}{g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx dy + g_{22}dy^2} \right]^{1/2}$$

$$= \left[ \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{g_{11} + 2g_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + g_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right]^{1/2}$$

Sea  $\vartheta$  la dirección de  $ds_T$  con respecto a la línea coordenada x (el sentido no importa)

$$\vartheta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{dy}{dx} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

Entonces en función de  $\vartheta$  escribimos

$$m = \left[ \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{g_{11} + 2 g_{12} \operatorname{tg} \theta + g_{22} \operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/2} \quad [83]$$

Los valores de  $\theta$  y  $g_{ij}$  están dados en el punto P. No hay un valor fijo de  $m$  en P ya que depende de la dirección de  $ds_T$  en P (en general B describe una elipse alrededor de P conocida como indicatriz de Tissot, que estudiaremos después).

Sustituyendo en (83)  $g_{ij}$  en función de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$  dados por (74) obtenemos, después de algunos cálculos:

$$m = 1 - \frac{1}{2} \left( a_{11}^{20} \cos^2 \theta + a_{22}^{20} \sin^2 \theta \right) x^2 - 2a_{12}^{11} \sin \theta \cos \theta x y - \frac{1}{2} \left( a_{11}^{02} \cos^2 \theta + a_{22}^{02} \sin^2 \theta \right) y^2 \quad [84]$$

que es la expresión que estábamos buscando.

### 2.3 DIRECCIONES PRINCIPALES

Sean AC y PD dos rectas perpendiculares entre sí en un punto P en la esfera S; sean A'C' y P'D' las tangentes correspondientes a las curvas transformadas en el plano. Supongamos que los ángulos A'P'D' y D'P'C' sean agudo y obtuso respectivamente. Supongamos también que un ángulo recto con su vértice en P gire de izquierda a derecha, alrededor de este punto P, en la esfera S, partiendo de la posición APD para llegar a la posición DPC. El ángulo correspondiente, en el plano tangente en P' a la esfera, irá variando desde A'P'D', que será agudo, hasta que coincida con D'P'C' que es obtuso; resulta evidente que debe ser recto en algunas de las infinitas posiciones intermedias.

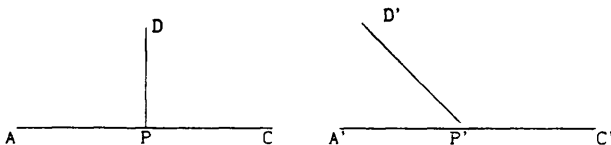


Figura 3. Ángulos correspondientes

Existe en algún momento una correspondencia entre ángulos rectos. Esto es posible generalizarlo a dos superficies cualesquiera sin apenas modificaciones. A estas direcciones correspondientes cuando se forman ángulos rectos se les llama **direcciones principales**.

#### 2.4 INDICATRIZ DE TISSOT

Tissot en el prólogo a su memoria (Tissot, 1880) dice: "Toda representación de una superficie sobre otra puede ser reemplazada, alrededor de cada punto, por una proyección ortogonal hecha a una escala conveniente" y se demuestra con las consideraciones geométricas del apartado anterior. Apoyándose en esto demuestra cómo un círculo infinitesimal sobre la superficie, con centro en P, se transforma, mediante la proyección, en una elipse en el plano tangente a dicha superficie por P, de manera que los semiejes serán las deformaciones lineales en las direcciones principales, veremos esto más detenidamente. Este hecho es fundamental, por lo sorprendente, ya que la deformación no va a depender ni de la naturaleza de la superficie ni del modo de representación elegido.

Sean  $a$  y  $b$  las deformaciones lineales en las direcciones principales que se toman como ejes  $x$  e  $y$ . Suponemos el mapa y el plano tangente a la esfera en P, de manera que coincidan las direcciones principales. Entonces a todo rectángulo infinitesimal en la esfera le corresponderá otro rectángulo infinitesimal en el plano, de diagonales  $PP_1$  y  $PP_2$  respectivamente.

Consideremos en la dirección  $PP_1$  un punto Q tal que  $PQ = aPP_1$ . Por definición

$$a = \frac{du}{dx} \quad b = \frac{dv}{dy} \quad [85]$$

ya que los ejes están tomados según las direcciones principales que hicimos corresponder antes.

La abscisa de Q es  $dx$ , la misma que la de  $P_2$ .

Llamando  $\theta$  al ángulo que forma  $u$  con  $PP_2$  y  $\phi$  al que forma  $x$  con  $PP_1$  se tiene:



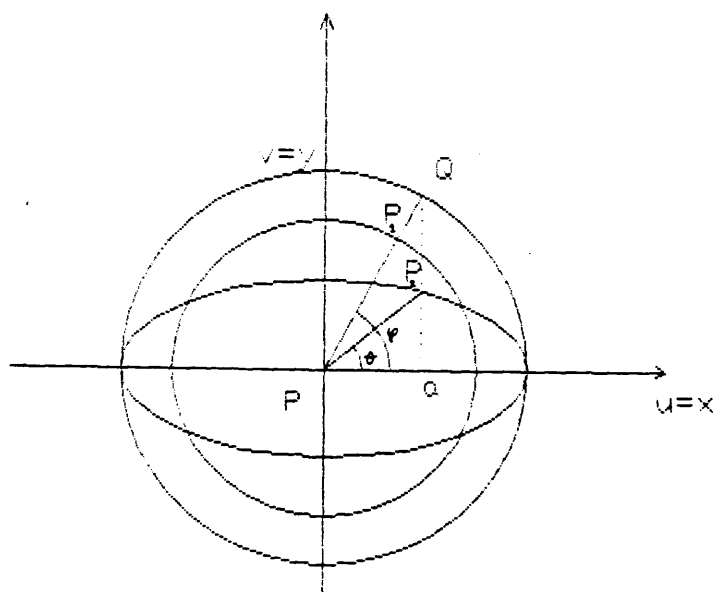


Figura 4. Elipse indicatriz de Tissot

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{du}{dx}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dv}{dy}$$

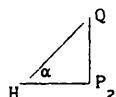
Teniendo en cuenta las definiciones de a y b será

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{b}{a} \quad [86]$$

que es independiente de P.

Se ha supuesto, según se representa en la figura 4, que el plano tangente y el mapa coinciden en el mismo plano y que éste es la hoja de papel; ahora bien, si giramos el plano tangente a la superficie alrededor del eje x levantando su parte superior sobre el mapa, de manera que los puntos Q se proyecten ortogonalmente sobre los  $P_2$  entonces la circunferencia del plano tangente, correspondiente a una circunferencia de la esfera por una proyección ortogonal, de radio  $PP_1$ , se proyectará ortogonalmente en una elipse de semiejes  $aPP_1$  y  $bPP_2$ . Veamos cuanto vale el ángulo  $\alpha$  formado por el plano tangente y el mapa, es decir, lo que hemos girado el primero sobre el segundo para que se proyectaran los puntos.

Con el giro se ha formado el ángulo  $\alpha$  de la figura:



Entonces,

$$\cos \alpha = \frac{P_2 Q}{HQ} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta \, dx}{\operatorname{tg} \vartheta \, dy} = \frac{b}{a}$$

luego  $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$  y las coordenadas de Q serán  $(dx, \frac{a}{b} dy)$ .

Estas coordenadas verifican la ecuación de la circunferencia (ver figura 4)

$$dx^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 dy^2 = (aPP_1)^2$$

de donde

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{PP_1}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{PP_1}\right)^2 = 1$$

que es la ecuación de una elipse.

Tomando una circunferencia de radio 1,  $PP = 1$ , tenemos

$$\frac{1}{a^2} dx^2 + \frac{1}{b^2} dy^2 = 1$$

que se conoce como indicatriz de Tissot de centro P y semiejes a y b. Nos da la deformación longitudinal de la representación en el punto P.

Esta deformación tiene sus valores máximo y mínimo en a y b, valores extremos que corresponden a las direcciones principales.

A nosotros nos interesa expresar todo esto en función del tensor métrico para utilizar los coeficientes de Chovitz

El módulo de deformación lineal es

$$m^2 = \frac{\delta_i^j dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j}$$

donde  $\delta_1^j$  es la delta de Kronecker y  $x^1 = x$  y  $x^2 = y$ .

Esto lo podemos poner como

$$\left( \delta_1^j - m^2 g_{1j} \right) dx^1 dx^j = 0$$

Dividiendo por  $ds^2$  y llamando  $\lambda^1 = \frac{dx^1}{ds}$  obtenemos

$$\left( \delta_1^j - m^2 g_{1j} \right) \lambda^1 \lambda^j = 0$$

los  $\lambda^1$  se llaman parámetros de dirección.

Para encontrar los valores extremos (máximo y mínimo) de  $m$ , tomamos la derivada respecto a  $\lambda^1$ , obteniendo así las dos ecuaciones siguientes:

$$\left( \delta_1^j - m^2 g_{1j} \right) \lambda^j = 0 \quad j = 1, 2 \quad [87]$$

Si  $\lambda^j \neq 0$  debemos tener

$$\delta_1^j - m^2 g_{1j} = 0$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 - m^2 g_{11} & -m^2 g_{12} \\ -m^2 g_{12} & 1 - m^2 g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Realizando los cálculos resulta

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)m^4 - (g_{22} + g_{11})m^2 + 1 = 0,$$

de donde,

$$m^2 = \frac{g_{11} + g_{22} \pm \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2g} \quad [88]$$

y como

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

resulta

$$m = \frac{\sqrt{g_{11} + g_{22} + 2\sqrt{g}} \pm \sqrt{g_{11} + g_{22} - 2\sqrt{g}}}{2\sqrt{g}} \quad [89]$$

Restringiendo los resultados a proyecciones regulares, con coordenadas locales cartesianas y simétricas respecto de los ejes coordenados cartesianos definidos en términos de segundo orden de  $g_{ij}$ , y además teniendo en cuenta (74) y que  $g$  es el determinante de  $g_{ij}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} = & 1 + \frac{1}{2} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{2} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02}) y^2 - \\ & - \frac{1}{8} [(a_{11}^{20} - a_{22}^{20}) x^2 + (a_{11}^{02} - a_{22}^{02}) y^2]^2 - \\ & - 2 (a_{12}^{11})^2 x^2 y^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (89) y los correspondientes valores de  $g_{11}$  y  $g_{22}$  de (74) se obtiene finalmente la longitud de los semiejes de la indicatriz de Tissot como función de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$ .

$$\begin{aligned} m = & 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) x^2 - \frac{1}{4} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02}) y^2 \pm \\ & \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{4} (a_{11}^{20} - a_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (a_{11}^{02} - a_{22}^{02}) y^2 \right]^2 + (a_{12}^{11} xy)^2} \quad [90] \end{aligned}$$

Designamos otra vez con  $a$  y  $b$  los dos valores extremos (no necesariamente distintos) de  $m$  dados por esta ecuación.

Se ve fácilmente que cuando  $a_{12}^{11} = 0$ ,  $m$  da los valores de  $a$  y  $b$  para una proyección en que las líneas coordenadas son ortogonales. Que  $a_{12}^{11} = 0$  implica que  $g_{12} = 0$ , como se ve en el desarrollo (74). Operando en (90) resulta

$$a = 1 - \frac{1}{2} a_{22}^{20} - \frac{1}{2} a_{22}^{02} \quad b = 1 - \frac{1}{2} a_{11}^{20} - \frac{1}{2} a_{11}^{02}$$

Si el radical vale cero, resulta  $a = b$ . Se sigue que si esta condición es satisfecha, los círculos de la esfera se transformarían en círculos en el plano y estamos ante una proyección conforme. El módulo de deformación lineal tiene el mismo valor en todas las direcciones que parten de un mismo punto, aunque varía de un punto a otro.

Cuando  $ab = 1$  estamos ante una proyección que conserva las áreas (Mailing, 1973). Sustituyendo y operando tendremos

$$m = 1 - \frac{1}{2} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20})x^2 - \frac{1}{2} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02})y^2$$

Sería deseable tener en el segundo miembro de (90) un polinomio de segundo orden.

Afortunadamente en todas las proyecciones que se tratarán en esta memoria la expresión bajo el signo radical es un cuadrado perfecto, y se obtiene un polinomio de segundo orden.

Si escribimos la expresión bajo el radical en la forma

$$A^2x^4 + B^2x^2y^2 + C^2y^4$$

para tener un cuadrado perfecto debe verificarse una de las tres condiciones siguientes:

- a)  $A = C = 0$
- b)  $B^2 = 2AC$
- c)  $B^2 = -2AC$

La primera condición  $a_{11}^{20} = a_{22}^{20}$ ,  $a_{11}^{02} = a_{22}^{02}$  incluye todas las proyecciones conformes y la proyección de Bonne.

La segunda condición  $a_{22}^{11} = 0$  es la condición de ortogonalidad.

La tercera  $\frac{1}{4}(a_{11}^{20} - a_{22}^{20})(a_{11}^{02} - a_{22}^{02}) + (a_{12}^{11})^2 = 0$  incluye las proyecciones de simetría radial. Que cubren todas las proyecciones dadas en esta memoria.

## 2.5 CALCULO DE LAS DIRECCIONES PRINCIPALES

Aplicando (90) obtenemos los valores correspondientes de  $\lambda^1$ , que dan las direcciones principales. En las condiciones de extremo en (87), eliminando  $m^2$  se obtiene.

$$g_{12}(\lambda^1)^2 + (g_{22} - g_{11})\lambda^1\lambda^2 - g_{12}(\lambda^2)^2 = 0 \quad [92]$$

Resolviendo la condición auxiliar

$$g_{ij} \lambda^i \lambda^j = 1$$

para  $\lambda^1$ , se obtiene

$$\lambda^1 = \frac{-g_{12} \lambda^2 \pm \sqrt{g_{11} - g(\lambda^2)^2}}{g_{11}}$$

Análogamente de (92) resulta

$$\lambda^1 = \frac{\lambda^2 \left[ (g_{11} - g_{22}) \pm \sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 - 4g} \right]}{2g_{12}}$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones queda

$$(\lambda^2)^2 = \frac{1}{2g} \left( g_{11} \pm \frac{g_{11}(g_{11} + g_{22}) - 2g}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 - 4g}} \right)$$

Por razones de simetría también resulta

$$(\lambda^1)^2 = \frac{1}{2g} \left( g_{22} \pm \frac{g_{22}(g_{11} + g_{22}) - 2g}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 - 4g}} \right)$$

Si se sustituye en estas dos últimas ecuaciones el radical de la (88) en función de  $m^2$  se obtienen las siguientes relaciones simplificadas:

$$\begin{aligned} (\lambda^1)^2 &= \frac{1 - g_{22} m^2}{g_{11} + g_{22} - 2gm^2} \\ (\lambda^2)^2 &= \frac{1 - g_{11} m^2}{g_{11} + g_{22} - 2gm^2} \end{aligned} \quad [93]$$

Ahora tenemos que expresar (93) en función de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$ . A partir de (90) y de (93) se obtiene,

$$(\lambda^1)^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4R} \left[ (a_{11}^{20} - a_{22}^{20})x^2 + (a_{11}^{02} - a_{22}^{02})y^2 \right] \right\}$$

$$(\lambda^2)^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4R} \left[ (a_{11}^{20} - a_{22}^{20})x^2 + (a_{11}^{02} - a_{22}^{02})y^2 \right] \right\} \quad [94]$$

donde R es

$$R = \left[ \frac{1}{4} (a_{11}^{20} - a_{22}^{20})x^2 + \frac{1}{4} (a_{11}^{02} - a_{22}^{02})y^2 \right]^2 + (a_{12}^{22}xy)^2$$

Otra forma de hacerlo es calculando los valores máximo y mínimo respecto a  $\theta$ . En este caso se obtienen como valores de  $\text{tg } \theta$  los correspondientes valores extremos de m

$$\text{tg } \theta_{\text{ext}} = \frac{(a_{22}^{20} - a_{11}^{20})x^2 + (a_{22}^{02} - a_{11}^{02})y^2 \pm 4R}{4 a_{12}^{11}xy} \quad [95]$$

(Chovitz, 1954).

## 2.6 ALTERACION DE ANGULOS

Partiendo de (86)  $\text{tg } \theta = \frac{b}{a} \text{tg } \varphi$

$$\frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \varphi} = \frac{\text{sen } \theta \cos \varphi}{\cos \theta \text{sen } \varphi} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } (\theta - \varphi) = \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \theta \text{tg } \varphi} = \frac{(b - a) \text{tg } \varphi}{a + b \text{tg}^2 \varphi}$$

fórmula que es obtenida por métodos geométricos en la memoria de Tissot (Tissot, 1880).

El ángulo  $\varphi$  va de cero a  $\frac{\pi}{2}$ , su alteración  $\varphi - \theta$  irá de cero a un cierto valor  $\omega$ . La alteración va de cero a  $\omega$  para descender de nuevo a cero.

El máximo se produce en el momento en que la suma  $\varphi + \theta$  valga  $\frac{\pi}{2}$ . Sean U y U' los valores máximos correspondientes a  $\varphi$  y  $\theta$  respectivamente, como deben satisfacer (86) se tiene

$$\text{tg } U = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{y} \quad \text{tg } U' = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Se deduce de (86) que

$$\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{sen}(\varphi + \vartheta)$$

y de aquí obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \omega &= \frac{a - b}{a + b} & \cos \omega &= \frac{2\sqrt{ab}}{a + b} \\ \operatorname{tg} \omega &= \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} & \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{\frac{a}{b}} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned} \quad [96]$$

Las dos últimas provienen de que:

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \quad U' = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$$

En (90) los valores extremos de  $m$ ,  $a$  y  $b$ , se pueden poner de la forma siguiente

$$\begin{aligned} a &= C + \sqrt{R} \\ b &= C - \sqrt{R} \end{aligned}$$

donde para simplificar los cálculos hemos llamado

$$\begin{aligned} C &= 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20})x^2 - \frac{1}{4} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02})y^2 \\ R &= \left[ \frac{1}{4} (a_{11}^{20} - a_{22}^{20})x^2 + \frac{1}{4} (a_{11}^{02} - a_{22}^{02})y^2 \right]^2 + (a_{12}^{11}xy)^2 \end{aligned}$$

y resulta,

$$\omega \cong \operatorname{tg} \omega = \frac{C + \sqrt{R} - (C - \sqrt{R})}{2 \sqrt{(C + \sqrt{R})(C - \sqrt{R})}} = \sqrt{\frac{R}{C^2 - R}} \quad [97]$$

es una aproximación (\*) porque consideramos el segundo orden. Esto nos da la dirección que corresponde a la máxima alteración angular  $\varphi - \vartheta$  en la superficie  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}$  y en el mapa  $\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ .

Lo dicho es válido siempre que los ángulos sean medidos a partir de una de las direcciones principales, es decir, que uno de los lados coincida con ella. Si ninguno de los dos lados coincide con las



direcciones principales, se procedería a descomponer dicho ángulo en suma (o resta ) de otros dos, con un lado en una dirección principal. Resultando de esta manera que las alteraciones se sumarían (restarían) también. La máxima alteración angular vendría dada por  $2\omega$ .

## 2.7 ALTERACION DE LONGITUDES

En la figura 4 se tiene

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi & dy &= \sin\varphi \\ du &= m \cos\theta & dv &= m \sin\theta \end{aligned}$$

Aplicando (85) obtenemos

$$m \cos\theta = a \cos\varphi \qquad m \sin\theta = b \sin\varphi$$

y de estas dos

$$m^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$$

Operando se llega a la siguiente relación entre  $m, \varphi$  y la alteración  $\varphi - \theta$  del ángulo  $\varphi$

$$2m \sin(\varphi - \theta) = (a - b) \sin\varphi$$

Derivando esta ecuación respecto a  $\varphi$  e igualando a cero se llega a que los máximos corresponden a las direcciones principales.

Llamemos  $m_1$  y  $m_2$  a los módulos de deformación de longitudes según dos direcciones perpendiculares entre si, y  $\epsilon$  a la alteración que da el ángulo recto formado por las dos direcciones. Por las propiedades de los diámetros conjugados en la elipse (teoremas de Apolonio) (Servicio Geográfico del Ejército, 1971) se tiene

$$m_1^2 + m_2^2 = a^2 + b^2 \qquad m_1 m_2 \cos\epsilon = ab$$

Para todos los ángulos no modificados por el sistema de representación (caso de las representaciones conformes) el producto de los módulos lineales, calculados según sus direcciones respectivas, es constante e igual a  $ab$  (Driencout et Laborde, 1932).

$$m_1 m_2 = a b \qquad [98]$$

Los módulos lineales correspondientes a las direcciones cuyo ángulo sufra la máxima alteración son iguales y, en este caso,

$$m = m_1 = m_2 = \sqrt{ab}.$$

Un algoritmo para obtener el módulo lineal con el propósito de simplificar los cálculos, es la fórmula de tres niveles:

$$m = \frac{1}{6}(m_1 + 4m_m + m_f)$$

donde

$m_1$  es el módulo lineal al principio de una línea  
 $m_m$  " " " " en medio de la línea  
 $m_f$  " " " " al final de la línea

El módulo de deformación lineal se necesita para reducir la longitud geodésica (distancia en la esfera) al plano (distancia en la proyección). Antes este módulo se tabulaba para las proyecciones Lambert, Transversa Mercator o U.T.M. Con la llegada de las calculadoras de mano y los ordenadores no es necesario el uso de las tablas, un estudio en este sentido es hecho en Stoughton (Stoughton, 1982) para sistemas Transversa Mercator o en Stoughton y Berry (Stoughton y Berry, 1985) para sistemas de coordenadas planas. Aunque se cometan graves errores según comunicó Chovitz (Chovitz, 1985) y Colvoresses (Colvoresses, 1985) a la revista poco después.

Un estudio completo en tres artículos del mínimo módulo de deformación lineal para proyecciones conformes es hecho en Reilly (Reilly, 1973) y en Reilly y Bibby (Reilly y Bibby, 1975 y 1976).

## 2.8 ALTERACION DE AREAS

Al elemento de superficie consistente en un círculo infinitesimal de centro P y radio ds le corresponde un área  $\pi ds^2$ , ya sabemos que este círculo en el mapa se convierte en una elipse infinitesimal de centro P' y semiejes ads y bds y área  $\pi abds$ . Por tanto el módulo de dilatación areolar  $\sigma$  vendrá dado por:

$$\sigma = \frac{\pi abds}{\pi ds^2} = \frac{ab}{ds}.$$

De (90) tenemos  $a = C + \sqrt{R}$  y  $b = C - \sqrt{R}$

donde

$$C = 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20})x^2 - \frac{1}{4} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02})y^2$$

$$R = \left[ \frac{1}{4} (a_{11}^{20} - a_{22}^{20})x^2 + \frac{1}{4} (a_{11}^{02} - a_{22}^{02})y^2 \right]^2 + (a_{12}^{11}xy)^2$$

Entonces,

$$\sigma = \left( C + \sqrt{R} \right) \left( C - \sqrt{R} \right) = C^2 - R$$

Haciendo los cálculos y dejando sólo las potencias hasta el segundo orden queda:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20})x^2 - \frac{1}{2} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02})y^2 \quad [99]$$

y así obtenemos de otra manera las ecuaciones de equivalencia (78)

$$a_{11}^{ij} = -a_{22}^{ij}$$



### 3 PROYECCIONES = =====

#### 3.1 NOTICIA HISTORICA

##### 3.1.1 Cartografía antigua

Siglos antes de la era cristiana, los babilonios trazaron mapas en tablillas de arcilla, los ejemplares más antiguos encontrados hasta ahora datan del 2300 a. C. Estos constituyen las pruebas escritas más antiguas de un intento de representación gráfica de una parte de la Tierra. Una tablilla desenterrada hace algunos años en Irak representa la Tierra con la forma de un disco rodeada de agua con Babilonia en el centro. Algunos dibujos de terrenos encontrados en Egipto y pinturas descubiertas en tumbas antiguas son casi tan viejas como las babilónicas, ver Smith J.R. (1986).

Los mapas prehistóricos debían basarse en la experiencia personal y la familiaridad con el terreno. Sin duda representaban los caminos que llevaban a las tribus vecinas, o donde fuentes, pozos de agua, sal, pastos y otras cosas necesarias podían ser encontrados.

A parte de la tablilla babilónica señalada más arriba pocos parecen haber sido los intentos por parte de los babilónios y egipcios de representar la Tierra en su totalidad. La construcción de mapas estaba motivada por necesidades prácticas como el establecimiento de fronteras. No sería hasta los filósofos griegos que las especulaciones sobre la forma de la Tierra tienen lugar.

##### 3.1.2 Período griego.

Los griegos sobresalieron entre los pueblos del mundo antiguo por sus conocimientos geográficos, entre otras cosas. Las pocas tierras cultivables en su región les condujo a la exploración marítima propiciando el desarrollo del comercio y el establecimiento de colonias. Sobre el año 600 a. C. Mileto se convirtió en el centro del conocimiento geográfico. Hecataeus, un erudito de Mileto, escribió un libro en el año 500 a.C. recopilando los conocimientos geográficos hasta la fecha, que probablemente sea el primer libro de geografía de la historia. Una generación más tarde Herodotus, con estudios más extensos y mayor

cantidad de datos procedentes de viajes, extiende y amplía el libro de Hecataeus. Aunque Hecataeus supuso la Tierra como un disco plano rodeado por el océano, Herodotus y sus seguidores lo cuestionan y proponen un gran número de otras formas posibles para el mundo conocido por entonces. El primero en proponer la esfericidad de la Tierra pudo ser Pitágoras ( siglo VI a.C.) o Parménides ( siglo V a.C.); a mediados del siglo IV la forma esférica de la Tierra era aceptada por los eruditos griegos, aproximadamente en el año 350 a.C. Aritóteles formula seis argumentos para probar que la Tierra era en verdad una esfera. " Es digna de elogio la fe que los antiguos griegos tenían en la ciencia aceptando la teoría, en aquel tiempo tan contraria al sentido común, de la esfericidad de la Tierra" dice Raisz (Raisz Z.,1972). En el siglo III a.C. Eratóstenes, director de la biblioteca de Alejandría, fue el primero en medir la circunferencia del globo terrestre, con un error de 1650 Km (Boyer C.B.,1986). A mediados del siglo II a.C. Hiparco dibujó una red de meridianos y paralelos basandose en el cálculo sobre la longitud de un meridiano hecha por Posidonio, que cometió un error mayor que el de Eratóstenes, llegando a un meridiano más pequeño que el real. Este canevas dibujado por Hiparco prefigura los trabajos de Ptolomeo.

La mayor figura del mundo antiguo en el avance y desarrollo de la geografía y cartografía fue Claudius Ptolomeo, astrónomo y matemático, pasó varios años estudiando en la biblioteca de Alejandría, el mayor depósito de libros científicos de aquella época. Su monumental trabajo "Guía de Geografía" fue desarrollado en ocho tomos. El primer tomo sienta los principios básicos y trata las proyecciones cartográficas. Los seis tomos siguientes facilitan una lista de 8000 lugares con su latitud y longitud aproximada. Salvo unos pocos que fueron hechos por observaciones, el mayor número de estos datos fueron obtenidos de mapas más antiguos, con distancias y direcciones aproximadas facilitadas por viajeros. El tomo octavo fue la contribución más importante, conteniendo instrucciones para la preparación de mapas del mundo, un tratado de geografía matemática y otros principios fundamentales de cartografía.

### 3.1.3 El período romano

Aunque Ptolomeo vivió y trabajó en los tiempos de gran influencia romana, se le puede considerar griego y producto de esa civilización, como lo fue la gran biblioteca de Alejandría.

Un error fundamental, al que se le atribuyen efectos posteriores a Ptolomeos, y que ya se indicó más arriba, es el haber considerado la forma de la Tierra más pequeña de lo que realmente es. Muestra Europa y Asia extendiéndose sobre más de la mitad del globo, en lugar de los 130 grados de su extensión real verdadera. Similarmente el mar Mediterráneo tiene una extensión de 20 grados más en el mapa de Ptolomeo. Estos errores pudieron tener su efecto 17 siglos más tarde cuando Colón supuso que la distancia que separaba Europa de Asia por occidente era menor.

Una diferencia fundamental entre la filosofía griega y romana se muestra en sus mapas. Los romanos estaban menos interesados en cartografía matemática, les interesaba más resolver necesidades prácticas para las campañas militares y la administración de las provincias. Volvieron a la antigua forma del disco para representar la totalidad de la Tierra, ya que de esta manera los mapas les resultaban más sencillo de leer y de entender.

Como en otros campos de la ciencia y la tecnología, el progreso en geografía y cartografía sufrió una parada, por no decir un retroceso, consecuencia del alejamiento de la cartografía matemática por parte de los romanos. Una gran cantidad de mapas y documentos fueron destruidos o perdidos, y la subsistencia de gran parte de la obra de Ptolomeo, probablemente, fue debida a su gran prestigio y popularidad.

#### 3.1.4 Cartas y mapas medievales

El progreso en cartografía durante la edad media fue muy pequeño, había consciencia de la esfericidad de la Tierra pero los mapas permanecen sencillos y esquemáticos, en esta época aparecen influidos por dogmas religiosos y simbología fantástica.

Hacia el periodo final de la edad media aparecen las "cartas portulanas", bajo este nombre se agrupa un conjunto de mapas ideados por los almirantes y capitanes de la flota genovesa. Nacen bajo la necesidad de la navegación y el comercio. Génova, Pisa, Venecia, Mallorca, y Barcelona, entre otras, facilitan la información necesaria para su confección. Las cartas portulanas sobrepasan en exactitud y precisión a todos los mapas anteriores.

Otro fenómeno del final de la edad media fue el gran entusiasmo

despertado por los viajes de Marco Polo entre 1270 y 1290. La reciente información sobre lugares lejanos estimula el interés en los mapas del mundo, promoviendo su venta y circulación.

Mientras tanto los arabes traducen el tratado de Ptolomeo. Dos eruditos islámicos merecen especial atención. Ibn Haukal escribió "El libro de los caminos y provincias" ilustrado con mapas, y Al-Idrisi construye un mapa del mundo en 1154 para el rey cristiano Rogelio de Sicilia, mostrando mayor y mejor información sobre Asia de la que se disponía hasta entonces.

### **3.1.5 La época de los descubrimientos y exploraciones**

La caída de Bizancio hace que muchos se refugien en Italia, entre ellos eruditos que estaban al cargo de los antiguos manuscritos griegos. El reciente desarrollo de la imprenta capaz de reproducir los citados manuscritos, (antes sólo los leían las personas encargadas de su custodia) junto con el creciente interés en la exploración, da lugar a la época de oro de la cartografía.

La Geografía de Ptolomeo fue traducida al latín sobre 1405. Aproximadamente unas 500 copias fueron imprimidas en Bolonia en 1477, seguido de otras ediciones en alemán e italiano. A parte de permitir una amplia difusión, la imprenta nos ofrece reproducciones mas fieles de los trabajos originales. Los manuscritos de mapas frecuentemente eran reformados posteriormente al descubrir ciertos errores o simplemente al poseer nueva información, lo que dificultaba el posterior estudio histórico.

El progreso en otras tecnologías tales como la navegación, el diseño y construcción de barcos, los instrumentos de observación y la astronomía, y en general el uso más extendido de la brújula estimulan continuamente el perfeccionamiento de la información de los mapas existentes, como la realización de nuevos descubrimientos y exploraciones. Los grandes descubrimientos de Colón, Vasco de Gama, Vespucci, Magallanes y otros transforman el mapa del mundo de esos días. "Mapas modernos" se fueron añadiendo a las nuevas ediciones de la obra de Ptolomeo.

Las características de los nuevos mapas eran el aumento, exactitud y la confección artística, utilizando mucho los colores,



puesto que los mapas tenían todavía muchas zonas sin información destacable permitían al artista dar rienda suelta a su imaginación. Los mapas comenzaron a ser cada vez más y más elaborados, hasta el punto de convertirse en pequeñas obras de arte. Muchas de las ediciones de mapas pertenecientes a esta época son ahora artículos de coleccionismo.

El principal cartógrafo de la época de los descubrimientos fue Gerhard Kaufman (Mercator), (1512-1594), geógrafo y navegante. Su mapa de Europa, publicado en 1554, y el desarrollo de la proyección que lleva su nombre lo hicieron famoso. La proyección de Mercator (ver página 87) resuelve un viejo problema a los marinos: la posibilidad de trazar direcciones como líneas rectas. En 1569 representa el mundo conocido en 18 hojas.

Otros cartógrafos importantes de la escuela flamenca son Abraham Ortelius de Antwerp, discípulo de Mercator, realizó el primer atlas del mundo en 1570, y Jadocus Hondius. Los primeros mapas holandeses están entre los mejores por expresión artística, composición y reproducción. Juan de la Cosa, el propietario del buque insignia "Santa María" en 1500 realiza un mapa que recoge los descubrimientos de Colón, la recalada de Cabral en Brasil, el viaje de Cabot a Canadá, y la ruta de Vasco de Gama a la India. El primer mapa mostrando Norteamérica y Sudamérica claramente separadas de Asia corresponde a Martín Waldseemüller, es probablemente el primer mapa en el que el nombre de América va impreso. Waldseemüller resultó impresionado con el relato escrito por el navegante florentino Amerigo Vespucci.

En 1529, Diego Ribero, cosmógrafo del rey de España realizó un nuevo mapa del mundo en el que, por primera vez, aparecía la vasta extensión del Pacífico.

El francés Nicolas Sanson (1600-1667), realiza el primer mapa equivalente, es el autor de la proyección que lleva su nombre (ver página 100), a menudo acompañado del inglés que la aplicó: Flamsteed.

### 3.1.6 Siglos XVIII y XIX

La cartografía que evoluciona durante el siglo XVIII estaba caracterizada por una tendencia científica y mayor exactitud en los detalles a representar. Muy pronto los únicos motivos decorativos se reducen a los límites entre países y a los bordes.

En 1683 Jean-Dominique Cassini (1625-1712) al Sur y Lahire al Norte emprenden la medición del meridiano de París que se interrumpe. Es reemprendido en 1700 bajo la dirección de Jacques Cassini (1677-1756) y en 1746, el tercero de la familia, César-François Cassini (1714-1784) publica el mapa de la triangulación general de Francia en 18 hojas.

Los nuevos cartógrafos franceses eran científicos. El rey o la academia francesa subvencionaban empresas caras, como por ejemplo las triangulaciones realizadas para una determinación más precisa de la forma y medida de la Tierra. Tendencias similares iban apareciendo en toda Europa. En Prusia, influenciado por Francia, Federico II tenía intención de confiar la triangulación de su país a ingenieros franceses, pero argumentos defensivos sostenidos por los militares le hicieron desistir.

La nueva cartografía se basaba en mejores instrumentos de observación, con el telescopio jugando el papel más importante en la calidad de las medidas astronómicas. El perfeccionamiento del cronómetro hizo la medida de la longitud menos laboriosa que antes.

Muchos países en Europa comenzaron en el siglo XVIII a realizar levantamientos topográficos de sus territorios con carácter oficial, en un principio bajo responsabilidad del estamento militar para más tarde pasar a la esfera civil, tal es el caso de Ordnance Survey en Gran Bretaña, el Institut Géographique National de Francia, el Landestopographie de Suiza, y la Comisión del Mapa en España, entre otros.

Levantamientos topográficos de cierta envergadura sólo tuvieron lugar en ciertos países. El resto del mundo permanecería "desconocido" hasta la segunda guerra mundial.

En Francia la Carte Géométrique de la France fue autorizada en 1748, comprendiendo 182 hojas. Napoleón, un entusiasta de la cartografía, planeo un mapa de Europa en la escala 1:100000 que reemplazará el de Cassini, se estaba realizando cuando fue derrotado. En Gran Bretaña y España se comenzaron levantamientos topográficos nacionales en el siglo XVIII, y en Alemania, Suiza y Austria en el XIX.

El International Geographical Congress en 1891 propone que los países participantes colaboren en la producción de un mapa del mundo en

la escala 1:1000000. Las especificaciones y formato se establecieron pronto pero la realización fue lenta en los primeros años.

Airy (1861) busca una representación que represente lo más fielmente posible la superficie de la Tierra y para ello encuentra una que llama *equilibrio de errores* y que se verá en el capítulo siguiente.

### 3.1.7 Siglo XX

La primera guerra mundial, y con su mayor extensión la segunda, supusieron un gran avance en el conocimiento geográfico del planeta. Según la U.S. Air Force menos del 10% del mundo en 1940 estaba representado en mapas con el suficiente detalle como para que cubriera las necesidades del vuelo aéreo. A consecuencia de esto se estableció un gran programa de fotografía aérea. La atmósfera de guerra fría reinante en los años 50 propician, en la esfera militar, una actividad creciente en la construcción de mapas. La OTAN desarrolla símbolos, escalas y formatos comunes de manera que los países miembros puedan intercambiar información más fácilmente.

Hoy día varias zonas del globo aún permanecen con datos incompletos. En la Antártida se está realizando un levantamiento topográfico que se espera termine en los próximos años.

Los ordenadores y la automatización han supuesto una revolución en las técnicas cartográficas. La aplicación de la electrónica y la informática ha facilitado de manera notable los levantamientos geodésicos, topográficos, hidrográficos y catastrales. Al mismo tiempo, una óptica superior y unos instrumentos más refinados, en general, ha permitido un aumento en la precisión de la medida de las observaciones y en la exactitud de los productos finales.

La mejora en calidad de los levantamientos ha incrementado la fiabilidad de los mapas que se basan en ellos.

Con todos estos avances queda claro que las investigaciones en Cartografía Matemática se dirigen a partir de los años cincuenta fundamentalmente a la búsqueda de sistemas de representación de mínima deformación. Merecen destacarse los trabajos siguientes.

Bernasconi (1950) busca sistemas de mínima deformación

aplicando criterios de elasticidad, llegando a complicadas ecuaciones en derivadas parciales que le obligan a simplificar el problema. Treinta años más tarde, Dermanis y Livieratos (1983a, b), Dermanis et al, (1983 y 1984) vuelven a utilizar estos mismos criterios recomendando su aplicación al estudio de las proyecciones. Sansó (1974) busca, dentro de las proyecciones conformes, la que da mínima deformación en las áreas y la compara con la carta modificada de Gauss, llegando a la conclusión de que la de Gauss es una buena aproximación de la primera. Otero y Sevilla (1990) estudian las proyecciones cónicas conformes con los criterios de elasticidad de Dermanis y comprueban las ventajas de estos métodos desde un punto de vista numérico. Grafarend y Lohse (1991) realizan la proyección de la superficie topográfica terrestre sobre el elipsoide de revolución según la mínima distancia entre el punto de la superficie de la Tierra y el representado, después construyen un atlas, dividido en dos cartas, sobre planos normales al elipsoide.

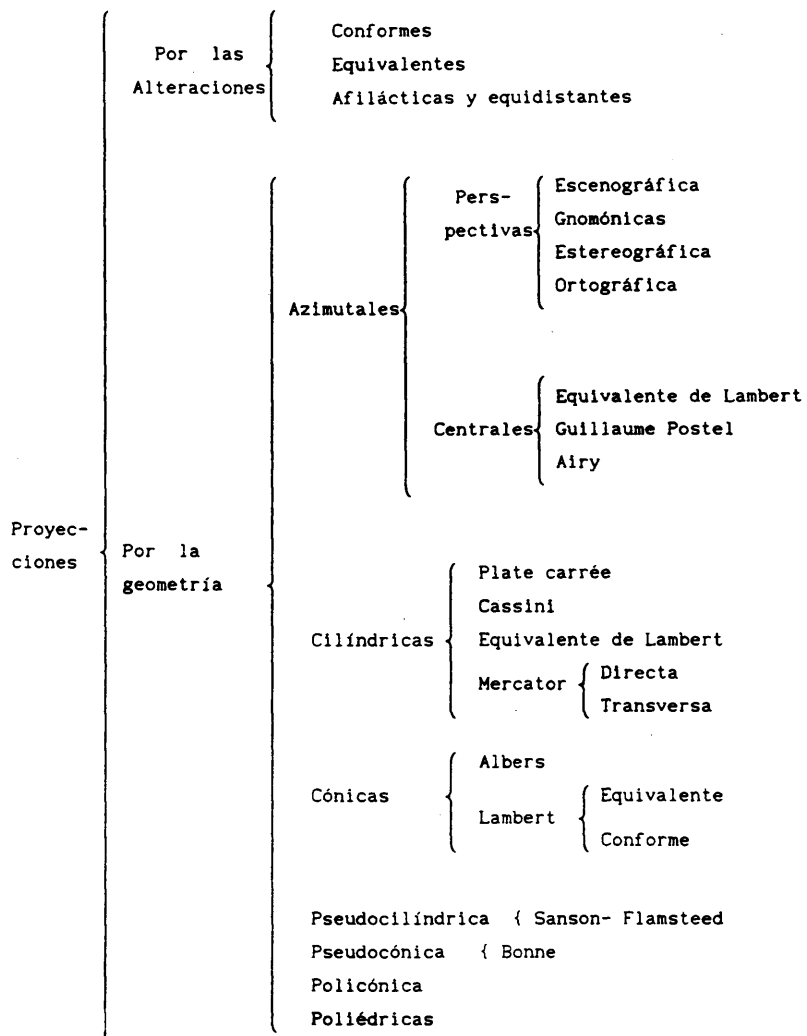
### 3.2 CLASIFICACION

Atendiendo a las deformaciones podemos clasificar las proyecciones en tres grandes grupos: **conformes** (conservan los ángulos), **equivalentes** (conservan las áreas) y **afiláticas**, que intentan compensar las distintas alteraciones, algunas conservan las longitudes a lo largo de un meridiano o paralelo llamado automecoico o línea isométrica estacionaria.

De otra manera resulta si las clasificamos atendiendo a las propiedades geométricas.

La superficie terrestre se puede representar proyectandola sobre un plano tangente a dicha superficie (azimutales), sobre un cilindro (cilíndricas) o sobre un cono (cónicas). Serán tratadas más adelante. En las policónicas, la superficie de proyección está formada por varias cónicas tangentes o secantes a la superficie terrestre.

En la proyección poliédrica se rodea el Globo por un poliedro de muchas caras que son tangentes a la superficie terrestre. El mapa topográfico de España esta hecho en este tipo de proyección.



Existen muchas otras proyecciones como las discontinuas y estrelladas que por su escaso interés se dejan aparte. Un resumen de las principales proyecciones puede verse en Sevilla (Sevilla, 1986).

Cuenin dice: "Se debe sin embargo notar que la cartografía moderna tiende a dejar las definiciones de las proyecciones a partir de construcciones geométricas y emplea más y más métodos puramente analíticos ... Se puede suponer que el empleo de calculadoras electrónicas permitirá aumentar la gama de las proyecciones actuales creando nuevas que satisfagan condiciones impuesta a priori" (Cuenin, 1972). Este es uno de los objetivos que se persigue con esta memoria. Sólo veremos las más importantes.

Esquemáticamente podemos clasificar las proyecciones, según el siguiente cuadro. Las redes de meridianos y paralelos están representadas en las Reticulas 1 a 20 del Apéndice III.

### 3.3 OBTENCION DE LA PROYECCION A PARTIR DE LA MATRIZ $A_2$

Las proyecciones específicas se obtienen completamente fijando los términos  $a_{kh}^{ij}$ . La elección de estos no se puede en principio hacer de una manera arbitraria, ciertas condiciones deben ser satisfechas (curvatura, isometría en el origen y truncamiento en el segundo orden) aparte de las propiedades que deseemos imponer (ortogonalidad, equidistancia, etc.).

Antes de realizar la clasificación según la matriz  $A_2$  de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$  del segundo orden, veamos unos pocos puntos con los que es preciso tener cuidado.

En la condición de curvatura (53)

$$K_0 = 2 a_{12}^{11} - a_{11}^{02} - a_{22}^{20},$$

para no tener que escribir  $K_0$  en nuestras ecuaciones podemos hacer el cambio  $a_{kh}^{ij} = \frac{a_{kh}^{ij}}{K_0}$  y emplear  $\bar{a}_{kh}^{ij}$  en lugar de  $a_{kh}^{ij}$ , de esta manera la condición de curvatura queda:

$$1 = 2 \bar{a}_{12}^{11} - \bar{a}_{11}^{02} - \bar{a}_{22}^{20}$$

Tomaremos el origen como el punto del desarrollo de Taylor, esto es (0,0). Este puede ser en principio cualquier punto no singular, es decir, cualquier punto donde se pueda desarrollar tal serie. Por

ejemplo, no está permitido usar un polo como origen para la proyección Mercator. Algunas veces el origen viene dado por la definición de la proyección, por ejemplo, en la Plate Carré implica como origen un punto en el ecuador.

Con esto tenemos origen, dirección y  $a_{hk}^{ij}$  que completan los requisitos para que quede totalmente definida una proyección particular.

Proyección cartográfica y sistema de coordenadas en S son sinónimos en esta teoría. Por ejemplo: "Proyección de Mercator" significa tomar coordenadas de Mercator en S que son puestas en correspondencia isoparamétrica con las coordenadas cartesianas del plano.

Introduciremos una restricción que en principio no es necesaria pero reducirá considerablemente los cálculos. Trataremos sólo de proyecciones con simetría axial. Un ejemplo de proyección sin simetría axial es cualquiera de tipo oblicuo. Con esta restricción de los nueve términos de  $A_2$ , cuatro son cero y sólo cinco  $a_{11}^{21}$ ,  $a_{11}^{02}$ ,  $a_{12}^{11}$ ,  $a_{22}^{20}$  y  $a_{22}^{02}$  pueden ser elegidos, (ver (76)) que con la condición de curvatura se quedan en cuatro.

Así pues, elegiremos cuatro coeficientes con las condiciones (propiedades) que queramos que cumpla la proyección y el quinto lo sacamos por la condición de curvatura.

#### 3.4 OBTENCION DE LA MATRIZ $A_2$ A PARTIR DE LA PROYECCION

Esto se verá con la proyección de Sanson o sinusoidal que tomaremos como ejemplo, la obtención de la matriz  $A_2$  para otras proyecciones se hace por un proceso análogo. La proyección sinusoidal es una de las clasificadas en el esquema de antes como ejemplo de pseudocilíndrica, se verá en la sección 3.8 un poco más detalladamente.

Las fórmulas que nos dan la proyección son:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos \varphi \\ y &= \varphi \end{aligned} \quad [100]$$

$\lambda$  y  $\varphi$  representan la longitud y la latitud respectivamente.  $\varphi$  va dada en radianes en este caso.

Vamos a obtener  $A_2$  por dos métodos:

*primer método.*

Despejando de las fórmulas de la proyección

$$\lambda = \frac{x}{\cos y}$$

$$\varphi = y$$

Suponemos una esfera de radio uno.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y}$$

Queda por tanto:

$$d\varphi = dy$$

$$d\lambda = \frac{1}{\cos y} dx + \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy$$

Como hemos supuesto que es una esfera de radio uno ocurrirá

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

$$ds^2 = dy^2 + \cos^2 y \left( \frac{1}{\cos y} dx + \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy \right)^2$$

Operando llegamos a los  $g_{ij}$

$$g_{11} = 1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y$$

$$g_{12} = 2x \operatorname{tg} y$$

$$g_{22} = 1$$

Desarrollando en serie de potencias alrededor del punto (0,0)

$$a_{22}^{00} = \left( 1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y \right)_{(0,0)} = 1$$

$$a_{22}^{10} = \left( \frac{\partial [1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y]}{\partial x} \right)_{(0,0)} = 0$$



$$a_{22}^{01} = \left( \frac{\partial [1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y]}{\partial y} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{22}^{02} = \left( \frac{\partial^2 [1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y]}{\partial (y)^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{22}^{20} = \left( \frac{\partial^2 [1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y]}{\partial (x)^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{22}^{11} = \left( \frac{\partial^2 [1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y]}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{00} = (2x \operatorname{tg} y)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{10} = \left( \frac{\partial (2x \operatorname{tg} y)}{\partial x} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{01} = \left( \frac{\partial^2 (2x \operatorname{tg} y)}{\partial y} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{02} = \left( \frac{\partial^2 (2x \operatorname{tg} y)}{\partial (y)^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{20} = \left( \frac{\partial^2 (2x \operatorname{tg} y)}{\partial (x)^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$a_{12}^{11} = \left( \frac{\partial^2 (2x \operatorname{tg} y)}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} = 2$$

Puesto que  $g_{22} = 1$ , los  $a_{22}^{ij} = 0$  excepto para  $a_{22}^{00} = 1$

Como se debe cumplir la condición de curvatura (75) tenemos que dividir por 4, quedando  $\bar{a}_{12}^{11} = \frac{1}{2}$ .

*segundo método*

Despejando como antes de las fórmulas de la proyección se tiene:

$$\lambda = \frac{x}{\cos y}$$

$$\varphi = y$$

sustituyendo en la esfera de radio uno dada en coordenadas cartesianas tridimensionales

$$X = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = \sin \lambda$$

[101]

tenemos

$$\begin{aligned} X &= \cos y \cos \frac{x}{\cos y} \\ Y &= \cos y \sin \frac{x}{\cos y} \\ Z &= \sin y. \end{aligned}$$

En forma vectorial sería

$$\mathbf{X} = \left( \cos y \cos \frac{x}{\cos y}, \cos y \sin \frac{x}{\cos y}, \sin y \right)$$

derivando

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_x &= \left( -\sin \frac{x}{\cos y}, \cos \frac{x}{\cos y}, 0 \right) \\ \mathbf{X}_y &= \left( -\sin y \cos \frac{x}{\cos y} - x \sin \frac{x}{\cos y} \operatorname{tg} y, \right. \\ &\quad \left. -\sin y \sin \frac{x}{\cos y} + x \cos \frac{x}{\cos y} \operatorname{tg} y, \cos y \right) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{X}_x = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \quad \mathbf{X}_y = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y}$$

Como  $g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$  (donde  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}_x$  y  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_y$ ), operando llegamos a las mismas componentes del tensor y el proceso es igual que en el primer método.

En definitiva, la matriz  $A_2$  para esta proyección es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.5 PROYECCIONES ACIMUTALES

#### 3.5.1. Generalidades. Proyecciones perspectivas.

Las azimutales se definen como las representaciones que proyectan la esfera sobre un plano tangente a ella en un punto dado y desde un punto también dado. Cuando son puramente geométricas se llaman perspectivas que según donde se encuentre el punto de proyección, nos dará la clase. Cuando el punto de tangencia es el centro de la proyección estamos ante una proyección central.

Cada una se puede representar de una manera diferente dependiendo del centro de proyección: directa o polar cuando es uno de los polos, transversa o meridiana cuando es el ecuador y oblicua en otro caso. Para el estudio de las perspectivas ver Sanjuán (1982)

Tanto las proyecciones perspectivas como las centrales se pueden obtener por proyección desde un punto sobre un plano tangente a la esfera.

Consideremos una esfera  $S$  de radio 1, y un punto  $B$ , que se encuentra sobre una recta que es perpendicular al plano y pasa por el centro  $O$  de la esfera, a una distancia  $1 + h$  del centro  $O$ , la recta  $OB$  corta a la superficie  $S$  en  $D$ . Por  $D$  se ha dibujado el plano tangente  $T$  (ver figura 5).

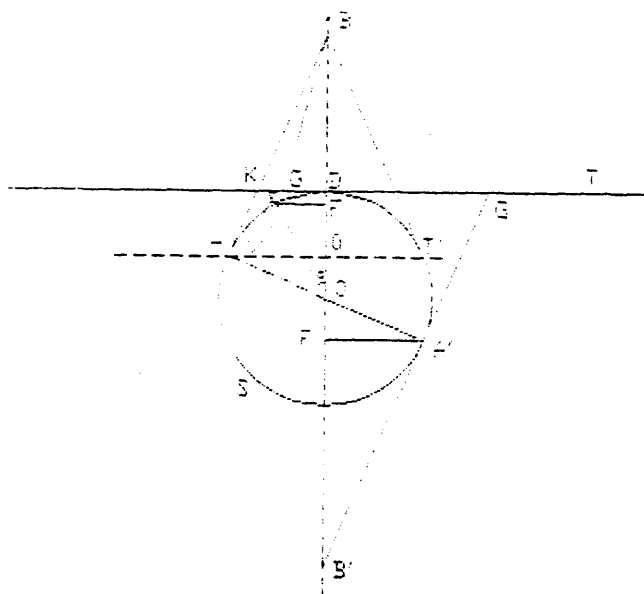


Figura 5. *Proyección acimutal*

Una proyección perspectiva de  $S$  en  $T$ , está formada por una aplicación que a un punto  $E$  de  $S$  le da la intersección  $G$  de la recta  $BE$  con el plano  $T$ .

El parámetro variable en este caso es  $h$ , que para cada valor define una proyección perspectiva diferente. Si  $B$  es el punto de vista (desde el cual se realiza la perspectiva) entonces  $h > 0$ . También es válido para  $h < 0$ , tomando como punto  $B'$  el punto de vista. Así pues el parámetro  $h$  varía desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . Esta claro que para  $h = 0$  la proyección es degenerada.

La proyección también depende del punto  $D$  que tomemos sobre la esfera para trazar el plano tangente, punto que llamaremos centro de la proyección. Nos puede dar lugar a proyecciones: polar, transversa u oblicua. Para nuestro estudio esto no va a suponer pérdida de generalidad.

En el plano utilizamos el sistema cartesiano rectangular dirigiendo el eje  $y$  según el meridiano hacia el Norte y el eje  $x$  según el primer vertical.

Sea  $q$  la distancia cenital y  $l$  el azimut así referidos. Entonces el elemento diferencial de longitud,  $ds$ , esta dado por:

$$ds^2 = dq^2 + \sin^2 q \, dl^2 \quad [102]$$

Esta es la primera forma fundamental en  $S$  en términos de las coordenadas  $(q, l)$ .

Como ya se dijo las componentes del tensor métrico cambian si lo hace el sistema de coordenadas ya que el elemento lineal es un invariante. De la figura 5 podemos obtener lo siguiente:

En el triángulo  $OEF$

$$EF = \sin q$$

Por semejanza de los triángulos  $\triangle BEF$  y  $\triangle BGD$

$$\frac{GD}{EF} = \frac{h}{1 + h - \cos q}$$

y de las dos anteriores:

$$GD = \frac{h \operatorname{sen} q}{1 + h - \cos q}$$

Para las coordenadas rectangulares en T se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{h \operatorname{sen} q \operatorname{sen} l}{1 + h - \cos q} \\ y &= \frac{h \operatorname{sen} q \cos l}{1 + h - \cos q} \end{aligned} \quad [103]$$

Para obtenerlas en función de la colatitud  $\vartheta$  y la longitud  $\lambda$  se opera por trigonometría esférica en el triángulo que forma el Polo, el centro de la proyección (D) y el punto considerado (E).

$$\begin{aligned} x &= \frac{h \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \lambda}{h - 1 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta_0 \cos \lambda} \\ y &= \frac{h (\cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta_0 - \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta_0 \cos \lambda)}{h - 1 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta_0 \cos \lambda} \end{aligned} \quad [104]$$

$\vartheta_0$  es la colatitud que da el centro de la proyección. Vamos a considerar  $\vartheta_0$  cualquiera, no va a influir en lo que queremos hacer como se verá rápidamente. Por esto mismo podemos utilizar las fórmulas (104).

Una proyección estará definida tomando un sistema de coordenadas particular en S que serán las coordenadas cartesianas del plano T. La forma fundamental en S en términos de estas coordenadas es:

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2 g_{12} dx dy + g_{22} dy^2$$

donde  $g_{ij}$  son funciones de  $x$  e  $y$ . Por consiguiente, el trabajo a realizar es transformar (103) en (105) por medio de (104) y de este modo obtener las fórmulas específicas para  $g_{ij}$ . Las expresiones exactas resultan engorrosas y vienen dadas por Chovitz (Chovitz, 1978)

$$\begin{aligned} g_{11} &= L(1 + J x^2) \\ g_{12} &= LJ x y \\ g_{22} &= L(1 + J y^2) \end{aligned} \quad [105]$$

donde:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 \\ K &= 1 - \left(1 + \frac{2}{h}\right) R^2 \\ J &= \left(1 + \frac{2}{h}\right) K^{-1} \\ L &= \left(1 + \frac{1}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{1}{1+h} K^{1/2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ahora es cuando podemos realizar el desarrollo de Taylor alrededor del origen, en este caso el punto D de tangencia de I en S.

Las últimas expresiones se desarrollan, como decimos, hasta el segundo orden, con lo que obtenemos.

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \left(1 + \frac{3}{h}\right) x^2 + \frac{1}{h} y^2 \\ g_{12} &= \left(1 + \frac{2}{h}\right) x y \\ g_{22} &= 1 + \frac{1}{h} x^2 + \left(1 + \frac{3}{h}\right) y^2 \end{aligned} \quad [106]$$

De donde :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}^{20} &= \bar{a}_{22}^{02} = 1 + \frac{3}{h} \\ \bar{a}_{11}^{02} &= \bar{a}_{22}^{20} = \frac{1}{h} \\ \bar{a}_{12}^{11} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{h} \end{aligned} \quad [107]$$

O matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 + 3/h & 0 & 1/h \\ 0 & 1/2 + 1/h & 0 \\ 1/h & 0 & 1 + 3/h \end{pmatrix}$$

Según los valores de  $h$  vamos obteniendo las distintas proyecciones perspectivas.

### 3.5.2 Ortográfica

Es cuando  $h = \infty$

$$g_{11} = 1 + x^2$$

$$g_{12} = x y$$

$$g_{22} = 1 + y^2$$

Es decir, tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [108]$$

Dependiendo del valor de  $\phi_0$  tendremos:  $\phi_0 = 0$  . Ortográfica directa, polar o ecuatorial donde los meridianos resultan rectas que pasan por el polo y forman con el origen ángulos iguales a sus longitudes; los paralelos son circunferencias.  $\phi_0 = 90^\circ$ . Ortográfica meridiana o transversa. Aquí resultan los paralelos líneas rectas paralelas al eje  $x$  y los meridianos elipses.  $\phi_0 =$  cualquiera. Ortográfica oblicua. Los meridianos serán elipses con centro en D, con semieje mayor valiendo la unidad y menor  $\text{sen}\phi_0 \text{sen}\lambda$  . Los paralelos también son elipses cuyos semiejes valen  $\text{sen}\phi_0$  y  $\text{sen}\phi_0/\text{cos}\phi_0$  para el mayor y el menor, respectivamente.

### 3.5.3. Gnomónica

Resultan para  $h = -1$  de donde

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [109]$$

Una característica de esta proyección es que todo círculo máximo en la esfera resulta una línea recta en el plano.

Como antes podemos considerar la proyección gnomónica polar o directa ( $\phi_0 = 0$ ) donde los meridianos son rectas que pasan por el centro de la proyección y forman con el primer meridiano ángulos iguales a sus longitudes; los paralelos son círculos centrados en el Polo y de radio  $\tan \phi_0$ . (Retícula 1). Gnomónica meridiana o transversa ( $\phi_0 = 90^\circ$ ) en la que los meridianos son rectas paralelas y los paralelos hipérbolas. (Retícula 2). Gnomónica oblicua: Los meridianos son rectas que pasan por el Polo y los paralelos cónicas: elipses, parábolas o hipérbolas dependiendo del valor de  $\lambda$ . En la Retícula 3 se presenta la proyección gnomónica centrada en  $\phi = 0$ ,  $\lambda = 0$  superpuesta con la de segundo orden.

#### 3.5.4 Estereográfica

Resulta para  $h = -2$  y se tiene por tanto:

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [110]$$

Y esto según (64) nos dice que es conforme. De hecho es la única conforme dentro de las proyecciones perspectivas.

Estereográfica directa ( $\phi_0 = 0$ ). Los meridianos se representan por rectas concurrentes en el centro de la proyección que es el Polo y con ángulos con el eje  $y$  iguales a sus longitudes. Los paralelos son círculos con centro el origen y radio  $\tan \phi/2$ . (Retícula 4). Estereográfica meridiana o transversa ( $\phi_0 = 90^\circ$ ) tiene meridianos y paralelos representados por círculos centrados en el eje  $Y$  y  $X$  respectivamente (Retícula 5). Estereográfica oblicua con meridianos y paralelos representados también por círculos (Retícula 6).

Para un estudio de las propiedades de esta proyección con matemáticas elementales ver Shilgalis (Shilgalis, 1977).



### 3.5.5 Azimutal equidistante

Viene dada por  $h = -3$

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [111]$$

Se ve aquí que esta proyección es un caso más de proyección perspectiva,  $h = -3$ ). Se obtiene sobre un plano tangente a la esfera cumpliendo las propiedades de las proyecciones centrales a las que pertenece, esto es, los círculos máximos que pasan por el centro de la proyección son rectas concurrentes en él, resultando los ángulos entre los círculos y las rectas correspondientes iguales.

Una propiedad característica de esta es que es automecolica en los círculos menores o almicantarades, de ahí el nombre de equidistante. Igual que en las anteriores se pueden distinguir la polar, meridiana u oblicua dependiendo del punto de tangencia. En la retícula 8 se presenta el caso polar. Esta proyección también se llama de Guillermo Postel.

### 3.5.6 Azimutal equivalente.

También conocida con los nombres de Azimutal de Lambert o de Lorgna.

Siendo otra proyección central como la anterior también aparece como perspectiva para  $h = -4$

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [112]$$

Se ve que esto da un sistema equivalente si miramos (64).

El área de un casquete esférico cualquiera es igual a la del círculo que tiene por radio la cuerda del arco esférico generador de aquel (Retícula 9). Esta proyección se puede extender a todo el Globo con la equivalente de Aitoff.

### 3.4.7 Escenográfica

Es cuando  $h < -2$  (entran las dos anteriores). Se puede estudiar qué valores son los más convenientes para  $h$  a fin de satisfacer alguna condición, por ejemplo:

Un sistema perimecoico se da para  $h = -2.618$  en la teoría clásica de proyecciones. En la proyección de Tissot

$$\begin{pmatrix} -0.146 & 0 & -0.382 \\ 0 & 0.118 & 0 \\ -0.382 & 0 & -0.146 \end{pmatrix} \quad [113]$$

La Hire obtuvo una proyección tal que la transformada del arco de meridiano de  $45^\circ$  de amplitud, contado a partir del polo, sea igual a la transformada del mismo arco e igual amplitud desde el ecuador y le dio  $h = -2.707$  de donde:

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 0 & -0.37 \\ 0 & 0.13 & 0 \\ -0.37 & 0 & -0.1 \end{pmatrix} \quad [114]$$

Un sistema perihálico fue dado también por Tissot que dedujo que para reducir al mínimo la máxima deformación superficial en la representación de un hemisferio, en proyección escenográfica,  $h$  debía valer  $h = -3.148$ , con lo que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0.18 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [115]$$

Es interesante observar lo próximos que están estos valores de cero cuando se buscan sistemas de poca deformación.

También se observa que aunque no se verifican las condiciones en los coeficientes, sólo ocurre por unas décimas.

Un estudio de estas proyecciones sin necesidad de hacer cálculos, solamente superponiendo dos retículas puede verse en Turturici y Vassallo (Turturici y Vassallo, 1974).

### 3.6 PROYECCIONES CONICAS

#### 3.6.1 Generalidades

Este grupo incluye un gran número de proyecciones, varias de ellas se usan en la construcción de los atlas. Las hay conformes y equivalentes. Son apropiadas para la representación de países que se encuentren en zonas templadas, siempre que su extensión en longitud no sea muy grande.

En las proyecciones cónicas se considera un cono tangente o secante a la superficie terrestre. Si es tangente tocará en una línea que se le llama paralelo estandar, y si es secante tendrá en común con el Globo dos líneas y se dice entonces que posee dos paralelos estandares.

Suponemos el eje del cono coincidente con el de los polos, pues se usa casi exclusivamente en su sentido directo. Se llama cónica central cuando el centro de proyección se encuentra en el centro del Globo y cónica simple cuando es equidistante con un paralelo. Cuando el polo se representa por un círculo y no por un punto se llama troncocónica.

Los meridianos son rectas concurrentes y los paralelos circunferencias concéntricas, cuyo centro es el de concurrencia de los meridianos. En estas proyecciones los ángulos que forman los meridianos rectilíneos del mapa no son iguales a sus correspondientes sobre la superficie terrestre aunque siempre están en una relación constante que llamamos  $n$ . De esta manera en un mismo grupo se puede obtener una infinidad de proyecciones haciendo variar  $n$ .

Las expresiones generales son en forma polar:

$$\begin{aligned} r &= f(\varphi) \quad \text{o} \quad r = f(\theta) \\ \gamma &= n \lambda \end{aligned} \quad [116]$$

donde  $r$  y  $\gamma$  son las coordenadas polares;  $\varphi$  y  $\theta$  son la latitud y colatitud respectivamente y  $\lambda$  la longitud.

### 3.6.2 Cónica conforme de Lambert

Las fórmulas de la proyección son:

$$r_p = r_e \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

donde  $r_e$  es una constante que representa el radio del ecuador de la proyección, por tanto va a depender de la escala adoptada para el mapa. Tenemos que  $r_p$  es el radio de un paralelo. La constante  $n$  ha sido ya definida como constante del cono, pero también suele llamarse exponente de la proyección.

Si el polo cae fuera de los límites del dibujo, se construirá un sistema cartesiano con la proyección del meridiano como eje  $y$ , y la tangente a la proyección de un paralelo por el punto de corte con el meridiano citado, como eje  $x$ . Conviene que dicho paralelo sea el central de la hoja que se trate, le llamaremos paralelo medio (Retícula 11). Así tendremos el radio  $r$  que va desde ese punto de corte de meridiano y paralelo (tomado como origen) al punto considerado de coordenadas  $(x, y)$ , las coordenadas de esta forma quedan (Servicio Geográfico del Ejército, 1976)

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} (n\lambda) \\ y &= 2r \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\lambda}{2}\right) \end{aligned} \quad [117]$$

de donde tenemos la matriz correspondiente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que es conforme y exactamente igual a la de Mercator. Esto último nos indica que las dos proyecciones no presentan diferencias en la teoría de segundo orden. El estudio de la transformación de coordenadas entre ambos sistemas de representación está hecho en Shmutter (Shmutter, 1981).

La transformación de coordenadas geográficas  $(\lambda, \varphi)$  en las correspondientes a esta proyección se puede hacer por medio de unos coeficientes polinómicos calculados de ante mano, según la zona (Vincenty, 1985 y 1986). Este método es de simple aplicación y gran precisión.

Después de realizar algunas manipulaciones a las fórmulas de Lambert para un paralelo estandar Pearson (1990) obtiene las fórmulas para dos paralelos estandares (Reticula 12).

### 3.6.3 Albers

También conocida como tronco-cónica equivalente con uno o dos paralelos estándares. Steers (1949) llama cónica equivalente de Lambert cuando tiene un paralelo estándar y de Albers cuando tiene dos, pues en realidad fue esta última la descrita por primera vez por Albers en 1805. Para que sea equivalente se exige que conserve las áreas y de ahí se obtienen sus ecuaciones (Driencourt et Laborde, 1932)

$$r = \sqrt{r_p^2 + \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$\alpha = n\theta \quad [118]$$

Que en coordenadas cartesianas son

$$x = \sqrt{r_p^2 + \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \sin n\theta$$

$$y = C - \sqrt{r_p^2 + \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \cos n\theta \quad [119]$$

donde C es una constante que depende de dónde se encuentre el polo. La matriz será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que muestra la propiedad de equivalencia como era de esperar.

Los paralelos resultan arcos de círculos que son concéntricos mientras que los meridianos son líneas rectas. El eje y se representa a lo largo del meridiano central y el eje x perpendicular a este por donde se ha elegido el paralelo estandar. Si los paralelos estandares son dos se puede elegir uno u otro, habiendo fórmulas para cada uno de los casos en (Pearson, 1990).

### 3.6.4 Cónica simple equidistante

Se supone un cono tangente a lo largo del paralelo de colatitud  $\phi_0$ . Se suele utilizar para éste, como ya se dijo más arriba, el que

queda en el centro de la región a representar que resulta automecoico de ahí el nombre de la proyección.

El polo de la zona a representar se transforma en un arco de circunferencia en lugar de un punto (truncocónica) Como antes también tomamos los ejes cartesianos como tangentes al meridiano y paralelo automecoico de la carta en el punto en que estos se cortan. Las fórmulas directamente en cartesianas son (Mailing, 1973)

$$\begin{aligned}x &= [\operatorname{tg}\phi_0 - (\phi_0 - \phi)] \operatorname{sen}(n\lambda) \\y &= \operatorname{tg}\phi_0 - [\operatorname{tg}\phi_0 - (\phi_0 - \phi)] \cos(n\lambda)\end{aligned}\quad [120]$$

x se cuenta positivamente hacia el Oeste como las longitudes. La matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la misma que en Plate Carrée, siendo una cónica y otra cilíndrica aunque las dos equivalentes.

### 3.7 PROYECCIONES CILINDRICAS.

#### **3.7.1 Generalidades**

En las cilíndricas se supone un cilindro de revolución alrededor del Globo cuyo eje de revolución coincida con uno de éste. Si este eje coincide con el eje polar se llama directa, si el eje se encuentra en el plano del ecuador, transversa, y oblicua en otro caso. El cilindro puede ser tangente o secante a la superficie del Globo. Una explicación gráfica viene en numerosos libros de texto, por ejemplo (Cuenin, 1972).

Los distintos puntos del mapa están referidos a la proyección del primer meridiano que se toma como eje y y a la del ecuador tomado como x. Los polos son representados por unas rectas iguales y paralelas a las que forman las proyecciones de los paralelos del globo, son puntos singulares de la representación.

Las proyecciones cilíndricas se suelen aplicar a la construcción de planisferios, representación de la superficie terrestre

en una sola hoja, y no en dos yuxtapuestas como ocurre con los mapamundis, ver (Gougenheim, 1950, 1951).

En general las ecuaciones presentarán la forma:

$$\begin{aligned}x &= n \lambda \\y &= f(\varphi)\end{aligned}\quad [121]$$

puede ser  $\varphi$  como también la latitud creciente o autálica que veremos más adelante. Dependiendo de que el cilindro sea interior al globo, exterior o tangente a lo largo del ecuador, el parámetro  $n$  será  $< 1$ ,  $n > 1$  o  $n = 1$  respectivamente.

Se puede hacer la proyección utilizando funciones hiperbólicas (Bonifacino, 1967), el eje del cilindro tangente no tiene por qué ser paralelo al terrestre.

### 3.7.2 Cilíndrica Mercator

Esta es probablemente la más y mejor conocida de todas las proyecciones ya que es usada como carta de navegación y en la mayoría de los atlas. Aunque no se le pueda negar su gran mérito, es la gran responsable de algunas concepciones erróneas en geografía, por ejemplo, la apariencia de las zonas polares; en esta proyección resultan muy exageradas, el tamaño del continente Antártico aparece con un tamaño desmesurado si lo comparamos con las regiones ecuatoriales. Otro ejemplo de esta anomalía, es si se compara Groenlandia con Sudamérica. En realidad el tamaño de Groenlandia es como una décima parte que el tamaño de Sudamérica, pues bien aparece más grande. Esta proyección fue publicada por Mercator en su mapamundi de 1569, sin dar a conocer el procedimiento para determinar la distancia de los paralelos del mapa al ecuador. Es Bond quien, en 1645, da la expresión exacta de la distancia en función de la latitud, la Tierra se supone esférica, el cálculo integral no había sido inventado todavía.

Se considera un cilindro tangente en el ecuador a la superficie terrestre. Es la única proyección que siendo cilíndrica es conforme, y además que siendo conforme representa los paralelos y meridianos por líneas rectas perpendiculares entre sí (Reticula 13).

Aunque deforma los continentes se hizo rápidamente muy popular

entre los marinos que querían una proyección en la que pudieran efectuar el recorrido entre dos puntos siguiendo un rumbo dado, esto es, seguir la loxodrómica, curva que en la superficie terrestre forma un mismo ángulo en su intersección con todos los meridianos, y sirve para navegar con rumbo constante.

Las rutas marinas no se trazan tan fácilmente, las dificultades pueden ser bastantes si el usuario de la proyección no entiende en su totalidad las limitaciones de la carta. La distancia más corta entre dos puntos cualesquiera del Globo corresponde a la medida sobre el círculo máximo que pasa por dichos puntos. Navegar a lo largo de un círculo máximo distinto del ecuador o un meridiano supone cambiar constantemente de rumbo. Lo que se hace es combinar círculos máximos con loxodrómicas. En teoría resulta un aumento en la distancia siguiendo una loxodrómica pero no tanto como para perder la ventajas que ello aporta. En la retícula 14 se ha superpuesto la de segundo orden.

Las fórmulas generales son

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L} \\ x &= \lambda \end{aligned} \quad [122]$$

donde  $\lambda$  es la longitud y  $\mathcal{L}$  la latitud creciente, o variable Mercator que viene dada para la esfera por (Levallois, 1970),

$$\mathcal{L} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad [123]$$

Operando resulta

$$\mathcal{L} = \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi} \right]$$

de donde,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1 + \operatorname{sen}\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Sustituyendo esto en (101) obtenemos

$$X = \cos \operatorname{arcsen} \frac{e^{2y-1}}{e^{2y+1}} \cos x$$



$$Y = \cos \arcsen \frac{e^{2y-1}}{e^{2y+1}} \operatorname{sen} x$$

$$Z = \frac{e^{2y-1}}{e^{2y+1}}$$

Operando según el segundo método dado en la proyección Sanson

$$g_{11} = \cos^2 \arcsen \frac{e^{2y-1}}{e^{2y+1}}$$

$$g_{12} = 0$$

$$g_{22} = 4 \frac{e^{2y}}{\left( e^{2y+1} \right)^2}$$

Tomando las derivadas en (0,0), como antes, obtenemos los coeficientes correspondientes, resultando la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando la proyección Mercator con la gnomónica ambas útiles en la navegación, observamos que en la primera las líneas rectas son loxodrómicas, en la segunda el rumbo no permanece constante a lo largo de las líneas rectas, sin embargo sobre ellas se miden las distancias más cortas entre dos puntos cualesquiera. Efectivamente lo último representa una ventaja muy grande, pero no se compensa con el hecho de la excesiva exageración sobre la forma que se produce en una proyección gnomónica. Además, es imposible representar ni siquiera un hemisferio completo en la carta gnomónica, mientras que todo el planeta puede ser representado en la carta de Mercator, con excepción de las latitudes cercanas a  $\pm 90^\circ$ .

También existen la Mercator Transversa, que veremos más adelante, y la oblicua, que como se dijo anteriormente para simplificar los cálculos no consideraremos en esta memoria, las fórmulas para ella pueden encontrarse en (Pearson, 1990, página 195).

### 3.7.3 Proyección cilíndrica equivalente de Lambert

Se considera un cilindro tangente a la superficie terrestre en el ecuador. Es una típica proyección cilíndrica directa, es decir, los meridianos están representados por rectas paralelas, separadas por distancias proporcionales a sus diferencias de longitud; los paralelos resultan perpendiculares a los anteriores, con separaciones que son consecuencia de la ley que rige esta proyección, se aglomeran en las zonas polares. (Retícula 9). Las fórmulas de la proyección son (Pearson 1990)

$$\begin{aligned}x &= \lambda \\y &= \text{sen } \varphi\end{aligned}\quad [124]$$

Sustituyendo en la esfera de radio uno, se tiene

$$\begin{aligned}X &= \cos \arcsen y \cos x \\Y &= \cos \arcsen y \text{sen } x \\Z &= y\end{aligned}$$

Operando resulta

$$\begin{aligned}g_{11} &= \cos^2 \arcsen y \\g_{12} &= 0 \\g_{22} &= \frac{y^2}{1 - y^2} + 1\end{aligned}$$

Haciendo las derivadas correspondientes e imponiendo la condición de curvatura se obtiene  $A_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta proyección se utiliza algunas veces para mapas que reproducen el planeta entero en una sola hoja, cuando se quiere mostrar distribuciones.

### 3.7.4. Plates carrées

En general son proyecciones cilíndricas que conservan la longitud sobre los meridianos, las coordenadas de un punto cualquiera del mapa tienen por expresiones:

$$\begin{aligned}x &= n \lambda \\y &= \varphi\end{aligned}\quad [125]$$

donde  $n$  es una constante, que según la variemos nos va dando distintas proyecciones conocidas como cartas Plates Carrées.

Se supone el cilindro tangente a la esfera con el eje  $y$  dirigido según el meridiano y el eje  $x$  según el ecuador.

Tomando un paralelo de latitud  $\varphi_0$ , que llamamos paralelo medio, sacamos  $n$  de  $n = \cos \varphi_0$ . Para todo punto situado entre el paralelo medio y su antiparalelo (paralelo de latitud  $-\varphi_0$ ), se tiene (Driencourt et Laborde, 1932)

$$a = 1 \quad b = \sigma = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

y para un punto exterior a la zona que limitan estas dos líneas

$$a = \sigma = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \quad b = 1$$

en cada una de ellas no existe alteración.

Si tomamos como  $\varphi_0$  el ecuador tenemos  $n = 1$  y la proyección conocida como Plate Carrée, resultando con un meridiano y el ecuador automecoicos. Las fórmulas quedarán:

$$\begin{aligned}x &= \lambda \\y &= \varphi\end{aligned}\quad [126]$$

y realizando las operaciones como en las anteriores resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La deformación en longitud a lo largo de los paralelos se va haciendo máxima al acercarse a los polos. La convergencia de meridianos no se tiene en cuenta, y los polos se convierten en líneas rectas. Según Steers (1949) tiene todas las desventajas sin ninguna de las ventajas de las otras proyecciones cilíndricas.

### 3.7.5 Mercator Transversa

También conocida como proyección cilíndrica conforme transversa de Lambert. Al ser transversa aquí suponemos el cilindro tangente a lo largo de un meridiano y por tanto con su eje en el plano del ecuador como se dijo antes. Se obtienen las siguientes fórmulas de transformación (Servicio Geográfico del Ejército, 1971)

$$x = \frac{1}{2} L \frac{1 + \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda}{1 - \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda}$$
$$y = \operatorname{arctg} ( \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda ) \quad [127]$$

operando resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos simetría de la proyección respecto de los ejes coordenados. Los meridianos forman ángulos entre si en los polos iguales a los reales esféricos. Es una proyección conforme como se ve al observar la matriz. También se conoce como Gauss conforme. Su ventaja en la representación de grandes triangulaciones puede verse en Bonifacino (Bonifacino, 1966) y Levallois (Levallois, 1970)

Si realizamos un artificio para evitar las deformaciones que se producen según nos alejamos del meridiano origen, consistente en dividir la superficie terrestre en 60 husos iguales tenemos la conocida proyección Universal Transversa Mercator ( U.T.M. ) . Un ejemplo del paso de transversa Mercator a U.T.M. a través de las coordenadas geográficas está dado en (Field, 1980). Sobre cada huso se utiliza una proyección Mercator Transversa; y hay que obtener fórmulas para el paso de un huso a otro (Army Map Service, 1965), (Servicio Geográfico del Ejército, 1976) y ( Olliver, 1981).

### 3.7.6 Proyección de Cassini

Esta proyección es la Platé Carrée con el cilindro en posición transversa, es decir, tangente al Globo a lo largo del meridiano central de la zona a representar. Así pues resulta una proyección cilíndrica equidistante. El meridiano central es automecoico, se transforma en una línea recta dividida en partes iguales (ver retícula 12). Los otros

meridianos son líneas que cortan a los paralelos, decreciendo la distancia según se aproximan a los polos. Los meridianos en el mapa son curvos y por tanto más largos que el central. Las fórmulas son (ver Pearson, 1990):

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= \cos \varphi \text{ sen } \lambda \\ \text{tg } y &= \text{tg } \varphi \text{ sec } \lambda \end{aligned} \quad [128]$$

de donde sacamos la matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve que es una proyección equidistante como lo era la Platé Carrée. Tiene simetría respecto al sistema de ejes coordenados así como respecto a los meridianos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$  que también funcionan como ejes de simetría. También son líneas automecólicas, a parte del meridiano central, las líneas perpendiculares a dicho meridiano central.

La versión esférica de la proyección de Cassini se ha aplicado poco. Sin embargo, la elipsoidal, conocida como de Cassini-Soldner ha sido utilizada, en algunos países europeos, en lugar de la de Mercator. La edición antigua de una pulgada de Inglaterra y de seis pulgadas para el Reino Unido están trazadas con esta proyección

### 3.8 PSEUDOCÓNICAS

En este grupo los paralelos son siempre arcos de circunferencia concéntricos, pero los meridianos no son rectilíneos. Ya que los meridianos y paralelos no se cortan formando ángulos rectos, no existen proyecciones conformes dentro de esta clase.

#### **Proyección de Bonne**

La construcción general es similar a la de la cónica simple con un paralelo estándar. En la proyección de Bonne todos los paralelos son automecólicos y en ese sentido se pueden considerar todos paralelos estándares. En la cónica simple y en la policónica los paralelos estándares son construidos con un radio definido por  $\cot \theta_0$ . En la proyección de Bonne sólo un paralelo se construye de esta manera, los

otros se dibujan como círculos concéntricos, cuyo radio se saca de realizar las divisiones pertinentes en el meridiano central para que resulten automecoicos (Reticulas 16 y 17).

Las fórmulas que rigen la proyección en coordenadas polares son

$$\begin{aligned} r &= \text{tg } \vartheta_0 - \vartheta_0 + \vartheta \\ \alpha &= \frac{\text{sen } \vartheta}{r} \lambda \end{aligned} \quad [129]$$

donde  $\vartheta$  es la colatitud y  $\vartheta_0$  el paralelo medio de esa colatitud, a lo largo del cual las alteraciones son nulas, como se dijo antes. La generatriz del cono de revolución circunscrito en la proyección viene dada por  $\text{tg } \vartheta_0$ .

La matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es igual a la de Sanson-Flamsteed. Una es pseudocónica y la otra pseudocilíndrica y las dos son equivalentes.

### 3.9 PSEUDOCILÍNDRICAS

Algunos autores llaman a este grupo mericilíndricas, proyecciones que representan los paralelos con líneas rectas, generalmente automecoicas.

#### **Proyección de Sanson-Flamsteed**

En la proyección Sanson, también conocida por Flamsteed o proyección sinusoidal, el ecuador se toma como paralelo estandar resultando una línea recta automecoica. El meridiano central también es automecoico, los paralelos están igualmente espaciados. Una gran desventaja es que hacia los bordes del mapa los meridianos son muy oblicuos y la deformación aumenta considerablemente produciéndose una gran distorsión. Se utiliza frecuentemente para representar Africa, Oceania, Sudamérica, y algunas veces Australia.

Las fórmulas que nos dan la proyección son:

$$\begin{aligned}x &= \lambda \cos \varphi \\y &= \varphi\end{aligned}\quad [130]$$

$\lambda$  y  $\varphi$  son la longitud y la latitud respectivamente.  $\varphi$  va en radianes .

Según se hizo en el apartado 3.4 la matriz correspondiente es,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa en la matriz la proyección es equivalente. En realidad es un caso particular de la proyección de Bonne, que se vio en el apartado anterior.

### 3.10 POLICÓNICAS.

#### **Policónica Simple**

La superficie de proyección está formada por varias cónicas tangentes o secantes, los paralelos del mapa son arcos de circunferencia, no concéntricos, con sus centros en línea recta, pero sin que necesariamente los radios de los arcos de circunferencia sean las generatrices de los correspondientes conos circunscritos (Retículas 18 y 19)

Dentro de este grupo vamos a ver la conocida como policónica simple, donde los paralelos son automecóicos, y que uniendo los puntos de los paralelos que tengan igual longitud se obtienen los meridianos. Con fórmula (Malling, 1973)

$$\begin{aligned}x &= \cotg \vartheta \operatorname{sen} (\lambda \operatorname{sen} \varphi) \\y &= \varphi + 2 \cotg \varphi \operatorname{sen} \frac{\lambda \operatorname{sen} \varphi}{2}\end{aligned}\quad [131]$$

y la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que resulta igual a la de Cassini.

El inconveniente del rápido crecimiento de las alteraciones con la longitud  $\lambda$ , ha sido en parte resuelto por un artificio parecido al utilizado en la proyección U.T.M. Se divide el país, por ejemplo U.S.A. que es donde se ha aplicado, en husos de  $8^\circ$  de amplitud y a cada uno de ellos se aplica la proyección policónica simple, de esta manera las deformaciones se mantienen entre unos límites adecuados para poder utilizar la proyección con fines topográficos o militares.

### 3.11 TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

Laborde indica que las únicas coordenadas importantes en cartografía son las cartesianas en el plano y las geográficas en la Tierra, las demás se podrán utilizar en los cálculos teóricos pero en la práctica son éstas las que se utilizan. Aunque esto empezó a cambiar con la llegada de los ordenadores y calculadoras programables, por ejemplo ver Lee (Lee, 1974) y Williams (Williams, 1982). La red de coordenadas que hemos llamado  $u^i$  en S serán ahora las coordenadas geográficas  $\varphi$  y  $\lambda$  (latitud y longitud), mantenemos para el plano las coordenadas  $x^i$ . En símbolos

$$x^i = x^i(\varphi, \lambda) \quad [132]$$

Chovitz muestra la transformación en sus trabajos de Chovitz (Chovitz, 1954 y 1979).

La curvatura  $K$  si se considera una esfera de radio  $r$  será  $K = \frac{1}{r^2}$  y si es un elipsoide de radios de curvatura  $\rho$  y  $\nu$  será  $K = \frac{1}{\rho\nu}$ . No se ha hecho distinción hasta ahora, porque siempre se ha considerado la curvatura en el origen  $K_0$  y por tanto  $\frac{1}{K_0^2}$  es el radio de la esfera osculatriz en ese punto. Resulta notable la diferencia entre  $\rho$  y  $\nu$  incluso en el desarrollo de nuestra teoría de segundo orden.

La condición de segundo orden impuesta en (57) se traduce en tercer orden en las fórmulas de la transformación.

El origen de la proyección corresponde al punto  $(\varphi_0, \lambda_0)$  en coordenadas geográficas, que no es necesariamente el cero. La intersección del meridiano de Greenwich y el ecuador viene dada por  $\varphi_0 = \lambda_0 = 0$ , pero puede utilizarse otro punto como origen. Entonces,



$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= s \varphi_0 + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3 \varphi}{ds^3} \right)_0 \\ \lambda - \lambda_0 &= s \lambda_0 + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2 \lambda}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3 \lambda}{ds^3} \right)_0\end{aligned}\quad [133]$$

Donde los términos  $\left( \frac{d \varphi}{ds^i} \right)_0$  y  $\left( \frac{d \lambda}{ds^i} \right)_0$  para  $i = 1, 2$  son funciones de una dirección inicial,  $\alpha$ , y del tensor fundamental  $g_{ij}$ . Denotaremos, en particular, con  $\alpha'$  y  $g'_{ij}$  los símbolos que se refieran al sistema de coordenadas  $(\varphi, \lambda)$ ; de aquí

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(s, \alpha', g'_{ij}) \\ \lambda &= \lambda(s, \alpha', g'_{ij})\end{aligned}\quad [134]$$

las coordenadas geográficas no son localmente cartesianas en el punto  $(\varphi_0, \lambda_0)$  del desarrollo, luego la (134) no será en general válida para  $g_{ij}$ .

Ya que en (133)  $s$  y  $\alpha'$  aparecen siempre en relaciones del tipo  $(s \sin \alpha')^p$ ,  $(s \cos \alpha')^p$  o  $(s^p \cos^{p-q} \alpha' \sin^q \alpha')$ . Se puede poner (134) como

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(s \sin \alpha', s \cos \alpha', g'_{ij}) \\ \lambda &= \lambda(s \sin \alpha', s \cos \alpha', g'_{ij})\end{aligned}$$

Si tomamos el plano,  $s$  y  $\alpha'$  representarán las coordenadas polares y pueden ser sustituidas por las cartesianas, simplemente poniendo las fórmulas de transformación:

$$x = s \cos \alpha' \quad y = s \sin \alpha'$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(x, y, g'_{ij}) \\ \lambda &= \lambda(x, y, g'_{ij})\end{aligned}\quad [135]$$

Queda ahora el problema de encontrar expresiones convenientes para  $g'_{ij}$ , tal que  $g'_{ij}$  sea el tensor fundamental de  $(\varphi, \lambda)$  sobre el mapa donde  $x^i$  sean las coordenadas cartesianas. En la expresión (61)

$$g_{ij} = \delta_i^j + A_2 (x^1)^2 \quad [136]$$

donde se ha puesto  $(x^1)^2 = \begin{pmatrix} x \\ 2xy \\ y \end{pmatrix}$ ,  $x^1 = x$  y  $x^2 = y$ .

Entonces

$$ds_s^2 = \left( \delta_1^1 + A_2 (x^1)^2 \right) dx^1 dx^1 \quad [137]$$

siendo  $ds_s$  el elemento lineal en la superficie, llamando  $ds_p$  al elemento lineal en el plano, tenemos en coordenadas cartesianas

$$ds_p^2 = \delta_1^1 dx^1 dx^1$$

luego

$$ds_p^2 = ds_s^2 - A_2 (x^1)^2 dx^1 dx^1 \quad [138]$$

Se puede escribir en la forma:

$$ds_p^2 = g'_{11} d\varphi^2 + g'_{12} d\varphi d\lambda + g'_{22} d\lambda^2 \quad [139]$$

Habremos obtenido el  $g'_{ij}$  para introducir en (135) y el  $g_{ij}$  para (136). El primero es el tensor fundamental de  $x^1$  sobre la superficie y el segundo es el tensor fundamental de  $(\varphi, \lambda)$  sobre la carta.

Los desarrollos son válidos para el primero pero no para el segundo. El problema proviene de la obtención de (139) a partir de (138). El primer término del segundo miembro de (138) puede escribirse:

$$ds_p^2 = \rho^2 (d\varphi)^2 + \nu^2 \cos^2 \varphi (d\lambda)^2 \quad [140]$$

donde  $\rho$  y  $\nu$  son los dos radios principales de curvatura (del meridiano y del paralelo) tal que  $K = \frac{1}{\rho\nu}$ .

Observemos que el segundo término es de segundo orden, y consiguientemente introducimos las aproximaciones:

$$\begin{aligned} x &= \rho (\varphi - \varphi_0) = \rho \Delta\varphi \\ y &= \nu \cos \varphi (\lambda - \lambda_0) = \nu \cos \varphi \Delta\lambda \end{aligned} \quad [141]$$

y

$$\begin{aligned} dx &= \rho d\varphi \\ dy &= \nu \cos \varphi d\lambda \end{aligned} \quad [142]$$

Resultando ser los elementos de arco de meridiano y paralelo respectivamente. Estas son las ecuaciones de la transformación buscadas para el primer orden, lo que justifica tal aproximación.

Con la introducción de (141) y (142) usamos un procedimiento de aproximaciones sucesivas en el que (141) y (124) son los elementos de la primera aproximación. Se ve que vale con una sola iteración puesto que la aproximación introducida es de primer orden y viene a dar, al operar, el tercer orden en la (133).

Sustituyendo (140), (141) y (142) en la (138) se obtiene:

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \left[ 1 - a_{11}^{20} \rho^2 (\Delta\varphi)^2 - 2a_{11}^{11} \rho \nu \cos\varphi \Delta\varphi \Delta\lambda + a_{11}^{02} \nu^2 \cos^2\varphi (\Delta\lambda)^2 \right] \rho^2 \\ g'_{12} &= - \left[ a_{12}^{20} \rho^2 (\Delta\varphi)^2 - 2a_{12}^{11} \rho \nu \cos\varphi \Delta\varphi \Delta\lambda + a_{12}^{02} \nu^2 \cos^2\varphi (\Delta\lambda)^2 \right] \rho \nu \cos\varphi \\ g'_{22} &= \left[ 1 - a_{22}^{20} \rho^2 (\Delta\varphi)^2 - 2a_{22}^{11} \rho \nu \cos\varphi \Delta\varphi \Delta\lambda + a_{22}^{02} \nu^2 \cos^2\varphi (\Delta\lambda)^2 \right] \rho^2 \cos^2\varphi \end{aligned}$$

Se pueden calcular ahora los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  y sus derivadas. Para simplificar, supondremos la simetría radial de  $x^1$  (es decir  $a_{11}^{11} = a_{12}^{20} = a_{12}^{02} = a_{22}^{11} = 0$ ). Obtenemos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_0 &= \frac{\cos\alpha (1 + \eta_0^2)}{\nu_0} \\ \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)_0 &= \frac{\sin\alpha}{\nu_0 \cos\varphi_0} \\ \left( \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_0 &= - \frac{3 \operatorname{tg}\varphi_0 \eta_0^2}{\nu_0^2} \cos^2\alpha - \frac{\operatorname{tg}\varphi_0 (1 + \eta_0^2) \sin^2\alpha}{\nu_0^2} \\ \left( \frac{d^2\lambda}{ds^2} \right)_0 &= \frac{2 \operatorname{tg}\varphi_0}{\nu_0^2 \cos^2\varphi_0} \sin\alpha \cos\alpha \\ \left( \frac{d^3\varphi}{ds^3} \right)_0 &= \frac{\cos^3\alpha}{\nu_0^3} (a_{11}^{20} \rho_0 \nu_0) - \frac{\sin^2\alpha \cos\alpha}{\nu_0^3} [(1 + 3 \operatorname{tg}^2\varphi_0 - \\ &\quad - (2a_{11}^{02} - a_{22}^{20} + 2a_{12}^{11}) \rho_0 \nu_0] \\ \left( \frac{d^3\lambda}{ds^3} \right)_0 &= \frac{\cos^2\alpha \sin\alpha}{\nu_0^3 \cos\varphi_0} [2 + 6 \operatorname{tg}\varphi_0 + (2a_{12}^{11} - a_{11}^{02} + \end{aligned}$$

$$+ 2a_{22}^{20} \rho_0 \nu_0] + \frac{\sin^3 \alpha}{\nu_0^3 \cos \varphi_0} (a_{22}^{02} \rho_0 \nu_0 - 2 \operatorname{tg} \varphi_0)$$

$$\text{donde } \eta^2 = \frac{\nu}{\rho} - 1$$

El subíndice 0 se refiere al origen de la proyección. Eliminando  $a_{12}^{11}$  y sustituyendo:  $\frac{a_{kh}^{ij}}{\rho \nu}$  en lo último. Puesto que el desarrollo está limitado hasta el tercer orden, podemos dejar los términos que tengan potencias de  $\eta$  superiores a  $\eta^2$  y dejar los términos de tercer orden que contenga  $\eta^2$ .

De esta manera obtenemos las ecuaciones de la transformación de coordenadas cartesianas locales (x, y), con simetría axial en las coordenadas geográficas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) hasta el tercer orden. Así nos queda:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \varphi - \varphi_0 = & \frac{x}{\rho_0} - \frac{3 \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{2 \rho_0} x^2 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2 \rho} (1 - \eta_0)^2 y^2 + \\ & + \frac{a_{11}^{20}}{6 \rho_0^3} x^3 + \frac{a_{11}^{02} - \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2 \rho_0^3} xy^2 \end{aligned} \quad [143]$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = & \frac{y}{\nu_0 \cos \varphi_0} + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\nu_0^2 \cos \varphi_0} xy + \frac{a_{22}^{02} - 2 \operatorname{tg} \varphi_0}{6 \nu_0^3 \cos \varphi_0} y^2 + \\ & + \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + a_{22}^{20}}{2 \nu_0^3 \cos \varphi_0} x^2 y \end{aligned}$$

Observese que los términos de primero y segundo orden son independientes de  $a_{kh}^{ij}$  y esto es para todas las proyecciones. Esto es porque se tomó la restricción de isometría, coordenadas cartesianas localmente. La diferencia entre las distintas proyecciones se encuentra únicamente en los términos de tercer orden y pueden ser fácilmente calculados.

Para obtener las fórmulas para  $(\lambda, \varphi) \longrightarrow (x, y)$  sencillamente invertimos las anteriores series:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\rho_0} &= \Delta\varphi + \frac{3 \eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{2} (\Delta\varphi)^2 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{2} (1 + \eta_0^2) (\Delta\lambda)^2 - \\
&\quad - \frac{a_{11}^{20}}{6} (\Delta\varphi)^3 + \frac{a_{11}^{02} - \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2} \cos^2 \varphi_0 \Delta\varphi (\Delta\lambda)^2 \quad [144] \\
\frac{y}{\nu_0 \cos \varphi_0} &= \Delta\lambda - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\nu_0 + 1} \Delta\varphi \Delta\lambda - \frac{a_{22}^{02} + \operatorname{tg} \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{6} (\Delta\lambda)^2 \\
&\quad - \frac{1 + a_{22}^{20}}{2} (\Delta\varphi)^2 \Delta\lambda
\end{aligned}$$

Estas fórmulas son idénticas a las fórmulas clásicas desarrolladas hasta el tercer orden en las coordenadas. De cualquier forma, esto es suficiente para mapas de gran escala y muchas aplicaciones.

#### EJEMPLO

Consideremos un mapa de escala 1:100.000 de dimensiones: 0.5 m de largo por 1 m de ancho. Tomamos el punto del desarrollo de la proyección en el centro del mapa, es decir  $(x, y) = (0, 0)$ . Suponemos que  $S$  es una esfera de radio  $r = 6.4 \cdot 10^6$  metros y que el origen está en el ecuador. Entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = \varphi &= \frac{x}{r} + \frac{a_{11}^{20}}{6r^3} x^3 + \frac{a_{11}^{02}}{2r^3} x y^2 \\
\Delta\lambda = \lambda &= \frac{y}{r} + \frac{a_{22}^{02}}{6r^3} y^3 + \frac{1 + a_{11}^{02}}{2r^3} y x^2
\end{aligned}$$

Los términos de segundo orden han desaparecido porque hemos tomado el origen donde  $(\lambda, \varphi)$  son localmente cartesianos como  $(x, y)$ .

¿Qué diferencia existe entre coger la proyección Mercator Transversa y Mercator directa?

Los términos de tercer orden en Mercator Transversa son:

$$\text{en } \Delta\varphi - \frac{xy^2}{2r^3} \text{ y en } \Delta\lambda - \frac{y^2}{6r^3}$$

Los términos de tercer orden en Mercator son:

en  $\Delta\varphi = \frac{(x^3)}{6 r^3}$  y en  $\Delta\lambda = 0$ .

La máxima diferencia para  $\Delta\varphi$  entre las dos proyecciones

es 
$$\frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^3 (10^5)^3 - \left( \frac{1}{48} \right) (10^5)^3}{(6.4)^3 (10^{18})} \text{ radianes} \approx 0.2 \text{ segundos} \approx$$
  
 $\approx 0.06 \text{ mm con la escala del mapa.}$

Para  $\Delta\lambda$ , la diferencia correspondiente es incluso menor ( $\approx 0.04 \text{ mm}$ ), la diferencia de las representaciones gráficas de las proyecciones es insignificante.

En este ejemplo, el resultado  $\Delta\lambda = \frac{y}{r}$  para la proyección Mercator, confirma que los meridianos y la red de líneas hacia el Norte coinciden.

Otra forma de realizar la comparación de las deformaciones entre las dos proyecciones se podría hacer con el factor escala. El máximo valor de la razón  $\frac{m_{MT}}{m_H}$  es en torno al 0.01 % lo que nos indica otra vez que es indiferente tomar una u otra.

## 4 MINIMA DEFORMACION

= =====

### 4.1 EQUILIBRIO DE ERRORES

El astrónomo inglés Airy propuso en 1861 (Airy, 1861) la proyección que lleva su nombre y que llamó: "balance of errors". También se la conoce como proyección de equilibrio de errores.

Los dos errores fundamentales a los que están sometidas todas las proyecciones son los cambios en las áreas y en los ángulos. Si nos fijamos en la gama de las proyecciones perspectivas del capítulo anterior, que recordamos incluían las centrales, nos encontramos con la proyección azimutal equivalente ( $h=-4$ , apartado 3.5.6) sin distorsión en las áreas pero excesiva en los ángulos, mientras que por otra parte tenemos la proyección estereográfica ( $h=-2$  apartado 3.5.4) sin deformación en los ángulos pero gran deformación en las áreas. Entre estas dos se encuentran las proyecciones que han sido utilizadas por los geógrafos, con el propósito de compensar, de la mejor manera posible, las deformaciones producidas por una y otra clase de error, pero esta elección se llevó a cabo sin un criterio preciso hasta G.B. Airy. Queremos recordar aquí que la proyección que encontraremos que da mínima la energía elástica corresponde a  $h = -3.6$ , dentro de los límites citados.

Sea  $p$  y  $q$  la base y la altura de un rectángulo en la superficie de la Tierra, y supongamos que la base y la altura del rectángulo correspondiente en el plano sean  $p + \delta p$  y  $q + \delta q$  respectivamente, no se consideran potencias superiores a la primera, esta aproximación lineal es suficiente a efectos prácticos. El cambio de área viene dado por

$$\frac{\text{área en el mapa}}{\text{área en la esfera}} - 1 = \frac{(p + \delta p)(q + \delta q)}{p \cdot q} - 1 = \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta q}{q}$$

y el cambio en los ángulos por

$$\begin{aligned} \frac{\text{longitud en el mapa}}{\text{anchura en el mapa}} \times \frac{\text{anchura en la esfera}}{\text{longitud en la esfera}} - 1 &= \\ &= \frac{p + \delta p}{q + \delta q} \times \frac{q}{p} - 1 = \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta q}{q} \end{aligned}$$

la suma de ambos al cuadrado para evitar los valores negativos da

$$\left(\frac{\delta p}{p} + \frac{\delta q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta q}{q}\right)^2 = 2\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta q}{q}\right)^2.$$

Esto conduce a Airy a considerar la consecución de mínimo en la cantidad  $\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\delta q}{q}\right)^2$  como un buen criterio en la búsqueda de una proyección con características óptimas.

Sea  $\theta$  la colatitud, expresada en radianes, S la distancia correspondiente en el mapa; si se expresa S en función de  $\theta$  entonces se consigue la ecuación de la proyección, este va a ser el objetivo de todos los cálculos. Sea la longitud de un rectángulo infinitesimal  $\delta\theta$ , la correspondiente longitud en el mapa  $\delta S$ . Sea  $\alpha$  el ángulo azimutal con el que se ve la anchura del rectángulo desde el centro del mapa. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} p &= \delta\theta, & p + \delta p &= \delta S, & \delta p &= \delta S - \delta\theta; \\ q &= \alpha \operatorname{sen}\theta, & q + \delta q &= \alpha S, & \delta q &= \alpha (S - \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\delta q}{q}\right)^2 = \left(\frac{\delta S}{\delta\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{S}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2$$

la suma de los cuadrados de estos errores en el rectángulo infinitesimal es

$$\left[ \left(\frac{\delta S}{\delta\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{S}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2 \right] \operatorname{sen}\theta \delta\theta,$$

donde se ha omitido la constante  $\alpha$ .

Considerando todo el mapa

$$\int_0^\beta \left[ \left(\frac{\delta S}{\delta\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{S}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right)^2 \right] \operatorname{sen}\theta \delta\theta \quad [145]$$

donde  $\beta$  es el radio máximo. La condición es que esta integral sea mínima.

Según las características dadas por Airy más arriba, las proyecciones para las que busca equilibrio de errores son proyecciones centrales; en éstas las direcciones principales en un punto están dadas por la dirección que une dicho punto con el de referencia u origen, y la



otra por la dirección del almicantarat que pasa por el punto considerado. Así pues

$$\frac{\delta S}{\delta \theta} = a \qquad \frac{S}{\sin \theta} = b$$

donde a y b son los semiejes de la indicatriz de Tissot. Un año después del trabajo de Airy aparece en la misma revista, The Philosophical Magazine, otro de Clarke y Sir James (Clarke and James, 1862) donde se expone, con todo detalle, como una circunferencia en la esfera se transforma en una elipse en el plano con sus semiejes en las direcciones indicadas más arriba, 18 años antes que lo hiciera Tissot.

Los módulos de deformación lineal a lo largo de las direcciones principales, a y b, deberían valer 1 para que no existiera error, como no es así, sí es deseable que de alguna manera una combinación de ambos errores sea mínima. La idea dada más arriba es equilibrar estos errores de manera que la suma de sus cuadrados a través del mapa tomados en su totalidad sea mínima. De manera que (145) se puede poner como

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\beta} [(1-a)^2 + (1-b)^2] \sin \theta \, d\theta = \text{mínimo}$$

$\theta$  es la colatitud y  $\beta$  su límite extremo. Como se dijo antes al referirse a las proyecciones centrales se está considerando una región esférica bordeada por un círculo con un punto central de deformación nula. Con las pertinentes variaciones se pueden estudiar otras regiones. La expresión integral que da las condiciones de error mínimo para muchas proyecciones puede resultar de enorme complejidad. (A no ser que se impongan condiciones concretas, como hace Fernando Sansó (1974) que considera  $a = b$ ).

Realicemos la suma de todos los cuadrados de los errores en un huso infinitamente pequeño entre el polo 0 y el valor de  $\theta$  en el extremo de la representación y que notaremos por  $\theta_0$ . Teniendo en cuenta que da es constante se tiene:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\beta \left[ \left( \frac{dS}{d\vartheta} - 1 \right)^2 + \left( \frac{S}{\sin \vartheta} - 1 \right)^2 \right] \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= 2\pi \int_0^\vartheta \left[ z^2 \sin \vartheta + \frac{(y + \vartheta - \sin \vartheta)^2}{\sin \vartheta} \right] d\vartheta$$

donde se ha llamado  $y = S_p - \vartheta$  y  $\frac{dy}{d\vartheta} = z$

Poniendo

$$F(\vartheta, y, z) = z^2 \sin \vartheta + \frac{(y + \vartheta - \sin \vartheta)^2}{\sin \vartheta}$$

se obtiene el mínimo de  $F(\vartheta, y, z)$  aplicando cálculo de variaciones. Si se pone

$$M = \frac{dF}{d\vartheta} \quad N = \frac{dF}{dy} \quad P = \frac{dF}{dz}$$

debe verificarse la ecuación diferencial de Euler, a saber

$$N - \frac{dP}{d\vartheta} = 0$$

después de una serie de integraciones Airy (Airy, 1861) obtiene la siguiente ecuación como solución

$$y = -\vartheta - 2 \cotg \frac{\vartheta}{2} \log \cos \frac{\vartheta}{2} + C' \cotg \frac{\vartheta}{2} + C'' \frac{1}{\sin \vartheta}$$

donde  $C'$  y  $C''$  representan las constantes de integración. Ahora bien, y debe desaparecer cuando  $\vartheta = 0$ , por tanto  $C'' = 0$ . Para calcular la otra constante hay que apoyarse en la condición  $\left( \frac{dy}{d\vartheta} \right)_\beta = 0$ . Airy erróneamente toma  $C' = 1$ , error descubierto por Clarke y Sir James en el trabajo citado antes.

Un dibujo de la proyección de equilibrio de errores puede encontrarse hecha por Andrews (Andrews, 1938).

Un procedimiento similar se aplicará más adelante, en lo que se refiere a minimizar la suma de errores en la deformación sobre una superficie, con el objetivo de calcular la proyección con mínima energía elástica de deformación, pero antes resulta necesario tratar la elasticidad.

#### 4.2 PROBLEMA DE MILNOR

Dado un punto fijo  $(x_0, y_0)$  en la esfera, sea  $D_\alpha$  el disco cerrado de radio geodésico  $r\alpha$ , consistente en todos los puntos  $(x, y)$  de  $S$  para los cuales

$$d_s[(x, y), (x_0, y_0)] \leq r\alpha.$$

Aquí  $\alpha$  puede ser cualquier número del intervalo  $(0, \pi)$ , es la distancia angular desde el centro  $(x_0, y_0)$  a la frontera y corresponde al máximo valor de  $q$  en la figura 5;  $r$  es el radio de la esfera, que suponemos vale uno.

Milnor define el coeficiente de deformación de una proyección por el logaritmo natural

$$\delta = \log \left( \frac{m_1}{m_2} \right)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son el supremo y el ínfimo del módulo de deformación lineal, obtenidos al recorrer todos los puntos del disco.  $m_1$  y  $m_2$  son los semiejes de la indicatriz de Tissot  $a$  y  $b$ , aunque en este caso puede que no del mismo punto.

Ocurrirá que  $0 \leq \delta \leq \infty$ , donde  $\delta$  es finito si y sólo si  $a$  y  $b$  son positivos y números finitos. Si  $\delta$  es finito, la proyección es continua y uno-uno.

El problema consiste en determinar la proyección en la que el módulo de deformación lineal  $m$  sobre  $D_\alpha$  varíe lo menos posible.

**Teorema de Milnor.**

Hay una y sólo una proyección con mínima deformación en el dominio  $D_\alpha$ . Esta proyección es infinitamente diferenciable y tiene deformación  $\delta_0$  igual a

$$\log \left( \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right).$$

Este importante teorema esta demostrado por Milnor (Milnor, 1969).

La proyección por él obtenida es la **azimutal equidistante** ( $h=-3$ ). La fórmula  $\delta_0 = \log \left( \frac{\alpha}{\text{sen} \alpha} \right)$  muestra que la deformación  $\delta_0$  es más pequeña cuanto más pequeño sea  $\alpha$ .

Otra forma de ver esto es por la teoría objeto de esta memoria, la teoría de segundo orden, y que hace Chovitz (Chovitz, 1978).

Puesto que  $D_\alpha$  tiene simetría axial respecto a  $(x_0, y_0)$  es evidente que la proyección buscada debería tener simetría radial (azimutal) que incluye los casos de las proyecciones perspectivas. Dentro de la teoría de segundo orden, se mostrará que todas las proyecciones con simetría radial son también perspectivas. Suponemos también que las coordenadas están tomadas de forma que la proyección tenga simetría axial con respecto a los ejes coordenados. Esto resulta trivial en el caso de la esfera.

Utilizando (76) y (82) podemos poner el tensor :

$$\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}^{20} & 0 & \bar{a}_{11}^{02} \\ 0 & -(\bar{a}_{11}^{02} - \bar{a}_{11}^{20})/2 & 0 \\ \bar{a}_{11}^{02} & 0 & \bar{a}_{11}^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \quad [146]$$

De (75) y (81) en una proyección con simetría radial tenemos

$$3\bar{a}_{11}^{02} = \bar{a}_{11}^{20} - 1 \quad [147]$$

Tomamos un valor arbitrario de  $\bar{a}_{11}^{20}$  que ponemos en la forma

$$\bar{a}_{11}^{20} = 1 + \frac{3}{h} \quad [148]$$

y sustituyendo en la condición de curvatura (147) tenemos

$$\bar{a}_{11}^{02} = \frac{1}{h} \quad [149]$$

Interpretando  $h$  como la distancia del punto de perspectiva

hasta el plano tangente (figura 5 ), completaremos la demostración de que el conjunto de proyecciones con simetría radial coincide con el conjunto de proyecciones perspectivas (107). Por tanto, trabajaremos bajo la hipótesis de que la proyección de mínima deformación buscada es una perspectiva.

De (90) tenemos los valores para los semiejes de la indicatriz de Tissot en términos de los coeficientes  $a_{kh}^{ij}$ .

$$m = 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) x^2 - \frac{1}{4} (a_{11}^{02} + a_{22}^{02}) y^2 \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{4} (a_{11}^{20} - a_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (a_{11}^{02} - a_{22}^{02}) y^2 \right]^2 + (a_{12}^{11} xy)^2}$$

Considerando las condiciones (81) tenemos

$$\begin{aligned} m &= 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) (x^2 + y^2) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{2} (a_{12}^{11}) [x^2 + y^2] \right)^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) (x^2 + y^2) \pm \frac{1}{2} (a_{12}^{11}) [x^2 + y^2] = \\ &= 1 - \frac{1}{4} (a_{11}^{20} + a_{22}^{20}) R^2 \pm \frac{1}{2} a_{12}^{11} R^2 \end{aligned}$$

donde,

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad [150]$$

Sustituyendo los valores (107) y (150) obtenemos

$$m = 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 \pm \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} \right) R^2$$

de donde

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} \right) R^2 \\ b &= 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} \right) R^2 \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{R^2}{2h} \\ b &= 1 - R^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2h} \right). \end{aligned} \quad [151]$$

donde  $h$  es el parámetro de la proyección, que varía desde  $-\infty$  a  $+\infty$  continuamente excepto para  $h=0$ .  $R$  es el parámetro de posición radial, que varía de 0 al límite del disco  $D_\alpha$ .

Para buscar la mínima deformación procederemos de la forma siguiente:

Consideramos  $h$  fijo y buscamos el máximo de  $\mu = \frac{a}{b}$ , de todos los posibles cocientes dentro del disco  $D_\alpha$ .

Puesto que  $\mu > 1$  Chovitz no toma logaritmo como lo hace Milnor.

Una vez hecho esto, buscamos el mínimo respecto a  $h$  de todos los cocientes determinados.

Caso 1:  $h > 0$

En la figura 5 llamamos  $\hat{AOB} = \beta$  al ángulo máximo que se forma. Entonces

$$\cos \beta = \frac{1}{1+h}$$

y por el teorema de Pitágoras

$$\sin \beta = \frac{[h(2+h)]^{1/2}}{1+h}$$

Sustituyendo en (104)  $\psi$  por  $\beta$  y considerando  $\psi_0 = 0$  sustituimos en la ecuación (150)

$$\begin{aligned} \text{Máximo } R^2 &= \frac{h^2 \sin^2 \beta \sin^2 \lambda}{(1+h - \cos \beta)^2} + \frac{h^2 \sin^2 \beta \cos^2 \lambda}{(1+h - \cos \beta)^2} = \\ &= \frac{h^2 \sin^2 \beta}{(1+h - \cos \beta)^2} = \frac{h}{2+h} \end{aligned} \quad [152]$$

La variación de  $R$  es por tanto de 0 a  $\left(\frac{h}{2+h}\right)^{1/2}$

$\mu > 0$  ya que  $a$  y  $b$  son positivos, una simple inspección nos muestra que:

$$\begin{aligned}\min a &= 1 - \frac{R^2}{2h} \\ \max a &= 1 \\ \min b &= 1 - \frac{R^2(3+h)}{2h} \\ \max b &= 1\end{aligned}$$

Entonces, las dos posibles razones extremas son:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \frac{R^2}{2h}} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \frac{1}{1 - \frac{R^2(3+h)}{2h}}$$

Ya que  $\mu_2 > \mu_1 \quad \forall h > 0$  y  $0 < R^2 \leq \frac{h}{2+h}$ .

El mínimo valor de  $\mu_2$  se obtiene para  $h = \infty$ , que es la proyección ortográfica.

Caso 2 :  $-3 \leq h < 0$

Como  $h < 0$  llamamos a  $-h = H$  y así (98) queda en la forma

$$\begin{aligned}a &= 1 - \frac{R^2}{2H} \\ b &= 1 - \frac{R^2}{2} \left( \frac{3}{H} - 1 \right)\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga al caso 1 tenemos:

$$\mu_1 = 1 + \frac{\max R^2}{2H} \quad \text{y} \quad \mu_2 = 1 + \frac{\max R^2}{2} \left( \frac{3}{H} - 1 \right)$$

Para  $2 \geq H > 0$   $\mu_2 \geq \mu_1$ . El mínimo  $\mu_2$  es alcanzado para  $H = 2$  (proyección estereográfica). Para  $H > 2$ ,  $\mu_1 > \mu_2$  y el mínimo  $\mu_1$  es alcanzado para  $H = 3$  (proyección azimutal equidistante).

La comparación directa entre los dos subcasos muestra que el mínimo de las dos proyecciones se produce para  $H = 3$ .

Caso 3:  $h < -3$  (o  $H > 3$ )

Escribiendo

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1 + \frac{R^2}{2H} & m_2 &= 1 - \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{H} \right) \\
\max a &= 1 + \frac{R^2}{2H} \\
\min a &= 1 \\
\min b &= 1 - \frac{\max R^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{H} \right) \\
\max a &= 1
\end{aligned}$$

resulta que  $\mu$  es mínimo para  $H = 3$ .

Ahora se combinan los resultados de todos los casos. En el caso 1 era la proyección ortográfica ( $h = \infty$ ) en los otros la azimutal equidistante ( $h = -3$ ) Un simple análisis muestra que es para  $h = -3$  cuando se obtiene la mínima deformación.

Según el teorema de Milnor dado en este apartado, el valor obtenido de  $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$  en segundo orden es  $1 + \frac{\alpha^2}{6}$ . El resultado obtenido aquí es  $1 + \frac{R^2}{6}$ . Ya que

$$R^2 = \frac{h^2 \sin^2 \beta}{(1 + h - \cos \beta)^2},$$

si se pone  $h = -3$ , queda

$$R = \frac{3 \sin \beta}{2 + \cos \beta}$$

desarrollando en serie será:

$$R = \beta \left( 1 - \frac{\beta^4}{180} \right)$$

en segundo orden el valor de Milnor y Chovitz coinciden.



### 4.3 CONCEPTOS DE ELASTICIDAD

#### **4.3.1 Generalidades. Definiciones.**

Siempre que, debido a la causa que sea, tengan lugar cambios en la posición relativa de las partes de un cuerpo, el cuerpo se dice que ha sido deformado.

En el estudio de la deformación de los cuerpos, es decir de cuerpos que se deforman por efecto de fuerzas que actúan sobre ellos, pueden realizarse varios enfoques. Considerando el hecho experimental de la estructura atómica de la materia parece adecuado establecer el carácter discontinuo de esta, suponiéndola descompuesta en elementos de dimensiones atómicas o moleculares. Desafortunadamente, a pesar del fundamento físico del carácter discontinuo de la materia pocos desarrollos matemáticos útiles pueden obtenerse, sólo hechos básicos y de restringido valor. Así pues, suponemos la existencia de un continuo, los espacios ocupados por las superficies pertenecientes a la esfera y al mapa están, por decirlo así, llenos de materia de forma continua, homogéneamente continua. Suponemos también la propiedad de elasticidad al infinito, esto es, la materia se puede deformar todo lo que se quiera sin que sufra rotura. La propiedad por la cual un cuerpo cambia su forma inicial bajo la acción de unas fuerzas pero la recobra una vez estas cesan es conocido como elasticidad. Por otra parte si la deformación permanece se llama plasticidad; referente a esta propiedad, de la que se ha desarrollado toda una teoría en los últimos cien años, dice Kachanov (Kachanov, 1971): " ... una gran parte de la teoría (en contraste con la teoría de la elasticidad) trata de establecer leyes para las deformaciones plásticas en un estado complejo de esfuerzos ... las ecuaciones presentan una gran dificultad donde los métodos de la física matemática no valen. La aplicación de las técnicas informáticas pueden ser de gran utilidad". Ambas propiedades están íntimamente relacionadas, en realidad una no se da sin la otra, en nuestro trabajo consideraremos exclusivamente la primera.

Como ejemplo sencillo veamos el siguiente. Consideremos una barra de sección cuadrada suspendida verticalmente y cargada con un peso en su extremo inferior. Se toman dos puntos de una línea trazada a lo largo de la barra y se mide su distancia. Cuando se coloca el peso en el

extremo de la barra dicha distancia resulta un poco mayor, entonces se dice que ha sufrido una **extensión**. Si se suponen fuerzas laterales de manera que se evite la ~~contra~~cción lateral de la barra, la deformación se simplifica de manera notable. La extensión así definida se conoce como **extensión simple**.

De forma análoga, si se considera la deformación de un elemento de área o volumen se tiene la **dilatación cuadrática o cúbica**, aunque obviamente, estas se derivan de la extensión.

Supongamos que sobre la barra actúan varias fuerzas de manera que un elemento de área o volumen es modificado pero sin variar dicho área o volumen, entonces nos encontramos ante lo que se llama **cizalladura**, lo que es conocido como "shear" en los países anglosajones. Se le llamará **cizalladura pura** para diferenciarla de la **cizalladura simple** que es cuando después de deformarse el elemento del cuerpo considerado por cizalladura pura se le gira alrededor de un eje. Esto puede verse en las páginas 31 y 32 de Bhatia y Singh (1986), donde se encuentran unas figuras que lo explican de manera muy clara.

Se demuestra (Love, 1927) que toda deformación se puede expresar en función de la extensión simple y de la cizalladura simple.

La deformación como, alteración de la forma, está conectada con el problema de los cuerpos deformables, estudiado originalmente en la teoría de la elasticidad y más tarde en la mecánica de medios continuos. Puesto que la forma está conectada con el elemento lineal de la superficie, la deformación en un sentido más amplio esta ligada con la alteración de la superficie de dichos cuerpos, o incluso con entidades abstractas como la proyección de una red de paralelos y meridianos desde la superficie terrestre en el plano. Así pues la deformación elástica adquiere en Cartografía ese sentido abstracto, como si la superficie terrestre se deformara para acoplarla en la correspondiente del mapa.

Como la forma es descrita matemáticamente por el concepto de métrica, la deformación puede ser representada por los objetos matemáticos que dependen de las alteraciones métricas.

La aplicación de la Teoría de la Elasticidad en Cartografía aparece a finales del siglo pasado (Tissot, 1881) que analiza las deformaciones al hacer corresponder la red de meridianos y paralelos en un plano a través de una correspondencia uno-uno, ya explicado en el capítulo anterior. Actualmente la Teoría de la Elasticidad se aplica en Cartografía y Geodesia para proyectar el geoide sobre el elipsoide (Dermanis etc, 1984), la representación del elipsoide sobre la esfera (Bernasconi, 1956), o un elipsoide de revolución en uno de tres ejes (Amalvict and Livieratos, 1988) evitando tratar la complicada geometría de este último.

Se va a realizar, en primer lugar, el estudio de la deformación sobre una superficie utilizando los desplazamientos causados por unas fuerzas hipotéticas para más tarde unirlo al estudio de la diferencia de las métricas con la superficie sin deformar y deformada.

#### 4.3.2 Desplazamientos

Aunque antes se utilizó un ejemplo de cuerpo en tres dimensiones (barra), ya que se explicaban mejor los conceptos previos, trataremos de mantenernos, dentro de lo posible, en dos dimensiones que es lo que interesa para la aplicación que se realizará en esta memoria.

Como siempre, para simplificar y poder utilizar más tarde notación tensorial, se pone  $(u^1, u^2)$  por  $(\varphi, \lambda)$ , y  $(v^1, v^2)$  por  $(x, y)$ .

Las partículas de la superficie sin deformar pasan de una posición inicial a una final en la superficie deformada mediante los desplazamientos. En lo que sigue denotaremos por  $(u^1, u^2)$  las coordenadas de los puntos (o partículas) de la superficie sin deformar, y a los puntos correspondientes (las mismas partículas pero en la superficie ya deformada) por  $(u^1 + d^1, u^2 + d^2)$ . Entonces  $d^1$  y  $d^2$  son las proyecciones sobre los ejes del vector de desplazamiento. Esta claro que si se conoce el desplazamiento  $(d^1, d^2)$ , la deformación estará totalmente determinada.

Por ejemplo, el desplazamiento en una extensión simple paralela al eje  $u^1$  viene dado por las ecuaciones

$$d^1 = eu^1, \quad d^2 = 0$$

donde  $e$  es un número que representa la extensión. Si  $e$  es negativo resulta una contracción.

El desplazamiento en una cizalladura simple de magnitud  $s$  ( $s = 2 \operatorname{tg} \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo de la rotación, alrededor de un eje perpendicular a la deformación plana que estamos considerando, tomado desde el eje  $u^2$  al eje  $u^1$ , el dos se suele introducir por convenio (Jueger, 1969)) viene dado por las ecuaciones

$$d^1 = su^2, d^2 = 0$$

la posición alcanzada por cada partícula es la misma que se conseguiría deslizando todas las partículas paralelamente al eje  $u^1$  una cierta distancia proporcional a la distancia de cada partícula al eje  $u^1$ .

#### 4.3.3 Deformación homogénea

En el caso de extensiones simples y cizalladuras simples, las componentes del desplazamiento se expresan como funciones lineales de las coordenadas. En general, cuando esto ocurre se dice que la deformación es homogénea. Así se tiene

$$\begin{aligned} d^1 &= a_{11}u^1 + a_{12}u^2 \\ d^2 &= a_{21}u^1 + a_{22}u^2 \end{aligned}$$

Se infiere trivialmente que en toda deformación homogénea se verifica:

- a) Las líneas rectas se transforman en líneas rectas
- b) Líneas rectas paralelas siguen siendo paralelas.
- c) Sobre todas las líneas rectas con la misma dirección la extensión o contracción se realiza en la misma proporción.
- d) Una circunferencia se transforma en una elipse (elipse de Tissot), y dos diámetros perpendiculares en la circunferencia se transforman en dos diámetros conjugados en la elipse.
- e) Una elipse en general se transforma en una elipse, pero una elipse particular de determinada forma y orientación se transforma en una circunferencia, donde dos diámetros conjugados en la elipse se transforma en dos diámetros perpendiculares de la circunferencia.
- f) Hay un conjunto de líneas ortogonales en el estado sin deformar que permanecen ortogonales en el estado deformado. Esto se vió en el capítulo segundo, hecho por Tissot.

Procediendo ahora en el caso general, en que la deformación no sea necesariamente homogénea, tomamos  $(u^1 + \xi, u^2 + \zeta)$  un punto cercano a  $(u^1, u^2)$  y  $(d^1 + \eta, d^2 + \kappa)$  el desplazamiento correspondiente. Existen expresiones para las componentes  $\eta, \kappa$  del desplazamiento relativo en serie de potencias de  $\xi, \zeta$ , tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= \xi \frac{\partial d^1}{\partial u^1} + \zeta \frac{\partial d^1}{\partial u^2} + \dots \\ \kappa &= \xi \frac{\partial d^2}{\partial u^1} + \zeta \frac{\partial d^2}{\partial u^2} + \dots\end{aligned}\quad [153]$$

donde los términos que no se dan escritos contienen potencias de orden superior al primero. Las cantidades  $\eta$  y  $\kappa$  representan los desplazamientos relativos de una partícula que cuando no había deformación se encontraba en  $(u^1 + \xi, u^2 + \zeta)$ , relativo a la partícula que en el mismo estado se encontraba en  $(u^1, u^2)$ . Podemos decir que en un entorno suficientemente pequeño de un punto cualquiera, los desplazamientos relativos son funciones lineales de las coordenadas relativas. Es decir, la deformación en un entorno pequeño de un punto cualquiera es homogénea. Un desarrollo más general, donde lo que se hace aquí aparece como un caso particular, puede verse en Novozhilov (Novozhilov, 1953) o en Murnaghan (Murnaghan, 1951), este último utiliza notación matricial, lo que es poco común en textos sobre elasticidad.

Introducimos la notación siguiente:

$$\begin{aligned}E_{11} &= \frac{\partial d^1}{\partial u^1}, & E_{22} &= \frac{\partial d^2}{\partial u^2}, & E_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d^1}{\partial u^2} + \frac{\partial d^2}{\partial u^1} \right) \\ w_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d^1}{\partial u^2} - \frac{\partial d^2}{\partial u^1} \right)\end{aligned}\quad [154]$$

Utilizando (154) en (153) tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= E_{11}\xi + E_{12}\zeta + w_{12}\zeta \\ \kappa &= E_{12}\xi + E_{22}\zeta - w_{12}\xi\end{aligned}$$

$E_{ij}$  es conocido como tensor de deformación. A las cantidades  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  y  $E_{22}$  se les llama componentes de la deformación y a  $w$  rotación.  $E_{12}$  representa el coseno del ángulo que forman las líneas transformadas de

los ejes coordenados (Love, 1927). Las expresiones de estas componentes en coordenadas esféricas y cilíndricas vienen dadas en Landau y Lifshitz (Landau y Lifshitz, 1986). Por E notaremos la matriz del tensor  $E_{ij}$ .

En el caso de deformaciones homogéneas las componentes de la deformación son constantes.

El cambio de área puede ser expresado en función de las componentes de la deformación. La razón entre una porción muy pequeña de área antes de la deformación y después de ella viene dada por el determinante funcional

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial d^1}{\partial u^1} & \frac{\partial d^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial d^2}{\partial u^1} & 1 + \frac{\partial d^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \quad [155]$$

que cuando no se consideran los productos de las derivadas, ya que antes se tomó el desarrollo (153) hasta el primer orden, el valor del determinante resulta

$$1 + \frac{\partial d^1}{\partial u^1} + \frac{\partial d^2}{\partial u^2}$$

o dicho de otra forma  $1 + \Delta$ . La cantidad  $\Delta$  esta definida por la ecuación

$$\Delta = E_{11} + E_{22} = \frac{\partial d^1}{\partial u^1} + \frac{\partial d^2}{\partial u^2} \quad [156]$$

que es el incremento de área por unidad de área, o dilatación areolar, que llamaremos dilatación.

Diagonalizemos la matriz E, calculando los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ ; así obtendremos las principales componentes del tensor de esfuerzos, que por técnica espectral resultan como las raíces de la ecuación (Birkhoff y Maclane, 1980):

$$\det(E - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(E)\lambda + \det(E) = 0$$

que son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \{ \text{tr}(E) + [\text{tr}(E)^2 - 4 \det(E)]^{1/2} \}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \{ \text{tr}(E) - [\text{tr}(E)^2 - 4 \det(E)]^{1/2} \}$$

Pongamos

$$\Delta = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\gamma = \lambda_1 - \lambda_2 \quad [157]$$

Las cantidades escalares  $\Delta$  y  $\gamma$  son la dilatación y la cizalladura máxima, respectivamente.

$$\Delta = \text{tr}(E) = E_{11} + E_{22}$$

$$\gamma^2 = \text{tr}(E)^2 - 4 \det(E) = (E_{11} + E_{22})^2 - 4(E_{11}E_{22} - E_{12}^2) =$$

$$= (E_{11} - E_{22})^2 + (2E_{12})^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$

donde hemos llamado  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a

$$\gamma_1 = E_{11} - E_{22}, \quad [158]$$

$$\gamma_2 = 2E_{12}. \quad [159]$$

que podemos considerarlas como componentes (no son componentes del tensor de deformación) de la cizalladura máxima  $\gamma$  según la expresión

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad [160]$$

Una interpretación práctica de estas componentes en el estudio de deformaciones de la corteza puede verse en Prescott (Prescott et al, 1979). que determinan la cantidad de dilatación y cizalladura en diferentes fallas en el Oeste de los Estados Unidos, utilizan las medidas precisas realizadas en 23 redes de triangulación en dicha zona; la mayor parte de las redes se encuentran ubicadas sobre la falla de San Andreas en California. Las componentes del tensor de deformación representan:

$E_{11}$  el cambio de longitud por unidad de longitud en la dirección del eje X. positiva cuando se trata de extensiones,

$E_{12}$  la cantidad de cizalladura através de cualquier línea paralela al eje X. positiva para cizalladuras laterales hacia la derecha,

$E_{22}$  el cambio de longitud por unidad de longitud en la dirección del eje Y, positiva cuando se trate de extensiones.

Los citados autores consideran otras cantidades que ya no son componentes del tensor de deformación, y que vamos a utilizar nosotros también en el presente trabajo, estas son:

- $\gamma_1$  cizalladura a lo largo de cualquier línea paralela a la recta  $y = -x$ , positiva para cizalladuras laterales hacia la derecha, y que es igual a (158),
- $\gamma_2$  cizalladura a lo largo de cualquier línea paralela al eje X, positiva cuando es tomada hacia la derecha, e igual a (159),
- $\gamma$  cizalladura según la línea de máxima cizalladura, con expresión (160).

Por otro lado, el desarrollo teórico de la máxima cizalladura de esfuerzos puede verse en las páginas 58 a 61 de Frederick and SunChang (1965).

#### 4.3.4 Cónica de deformación.

A través de cualquier punto pasa una, y sólo una, cónica de la familia

$$E_{11}\xi^2 + E_{22}\zeta^2 + E_{12}\xi\zeta = C \quad [161]$$

donde C es una constante. Cualquiera de estas cónicas se conoce como **cónica de deformación**. Tal cónica tiene la propiedad de que el cuadrado de su radio vector en una dirección determinada es proporcional a la extensión de una línea en esa dirección.

En el caso particular de una extensión simple, la cónica consiste en dos líneas paralelas; en el caso de deformación de cizalladura es una hipérbola equilátera. Si es un círculo, hay extensión o contracción, de la misma magnitud.



#### 4.3.5 Relación entre la dilatación, la rotación y el desplazamiento.

La dilatación viene dada por la ecuación (156)

$$\Delta = \frac{\partial d^1}{\partial u^1} + \frac{\partial d^2}{\partial u^2} \quad [162]$$

y es una cantidad escalar que proviene de un vector, esto se puede poner como la **divergencia** del vector  $(d^1, d^2)$ , es decir

$$\Delta = \text{div } (d^1, d^2) \quad [163]$$

Esta relación es independiente de las coordenadas, y puede expresarse de la forma siguiente: Sea un campo de vectores  $(d^1, d^2)$  en el recinto D cerrado por una curva C y sea N la proyección sobre la normal, hacia el exterior del recinto, del vector correspondiente a un punto. Entonces,

$$\int_C N \, ds = \iint_D \Delta \, dS \quad [164]$$

donde ds, dS representan los elementos de arco en C y de superficie en D, respectivamente. La integral de la derecha está extendida a toda la región D, resultando la fórmula de Gauss-Ostrogradski para el plano, ver Sommerfeld (Sommerfeld, 1950) páginas 19 a 26.

La rotación  $w_{12}$  tiene su significado en tres dimensiones como el rotacional de la deformación.

#### 4.3.6 Coordenadas de Lagrange y de Euler

Se trata de deformar la superficie de la esfera, o una parte de ella, hasta conseguir la del mapa; o viceversa. Esto nos va a permitir seleccionar las propiedades y características elásticas más cómodas para trabajar sin pérdida de generalidad.

Sea la superficie S (esfera) que tiene una posición determinada en el espacio antes de ser deformada, y sea Q un punto de dicha superficie. Por el proceso elástico la superficie S se convierte en la superficie T (plano), y el punto Q se desplaza al punto  $Q^*$ . Es posible elegir dos formas para describir el proceso deformativo que se produce

en la superficie: ver dicho proceso desde la superficie S o desde la superficie T. En el primer caso, todo se describe desde S, y se llama **método Lagrangiano**. El punto Q tiene por coordenadas las  $u^i$  que se conocen como **coordenadas lagrangianas**.

Las expresiones que transforman los puntos de S en T vienen dadas por

$$v^i = v^i(u^j) \quad i, j = 1, 2, \quad [165]$$

que corresponden a las relaciones recíprocas de las utilizadas hasta ahora en los desarrollos, ver apartado 1.6.

Como se ve el método de Lagrange utiliza coordenadas lagrangianas como variables independientes. El desplazamiento  $d^i$  del punto Q viene dado por

$$d^i = v^i(u^j) - u^i \quad i, j = 1, 2, \quad [166]$$

En el segundo caso, el estudio se realiza desde la superficie T, con las coordenadas  $v^i$  que se conocen como **coordenadas eulerianas**. Ahora se estudia la deformación desde el punto  $Q^*$ , las transformaciones en este caso resultan las descritas en el apartado 1.6, esto es

$$u^i = u^i(v^j) \quad i, j = 1, 2 \quad [167]$$

Este método es conocido como **método de Euler**, se utilizan coordenadas de Euler como variables independientes.

El desplazamiento viene expresado por

$$d^i = u^i(v^j) - v^i \quad i, j = 1, 2 \quad [168]$$

#### 4.3.7 Tensor de deformación.

Considerando el desarrollo lagrangiano el desplazamiento relativo es igual al desplazamiento absoluto que hemos notado por  $d^i$ , ya que el proceso se ve desde la esfera, la fórmula (153) se puede poner

$$d^i = d^i_j u^j \quad i, j = 1, 2 \quad [169]$$

donde se utiliza el criterio de sumación de Einstein y  $d^i_j = \frac{\partial d^i}{\partial u^j}$

Podemos descomponer el tensor de derivadas parciales  $d^i_j$  en sus partes simétrica  $\frac{1}{2} (d^i_j + d^j_i)$  y antisimétrica,  $\frac{1}{2} (d^i_j - d^j_i)$ .

La parte simétrica es otra forma más cómoda de poner las componentes de la deformación dadas en (154), es decir

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (d^i_j + d^j_i) \quad [170]$$

De manera análoga la parte antisimétrica está formada por los representantes de la rotación

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (d^i_j - d^j_i) \quad [171]$$

Luego, los desplazamientos se expresan como la suma de la rotación más la deformación

$$d^i = w_{ij} u^j + E_{ij} u^j \quad [172]$$

La rotación se refiere a movimientos en cuerpos rígidos, en el caso de la presente memoria no se tienen en cuenta, entonces la ecuación (169) queda

$$d^i = E_{ij} u^j \quad [173]$$

#### 4.3.8 Tensor de esfuerzos.

Volvemos de nuevo al ejemplo tridimensional de la barra; si consideramos cualquier sección normal a la barra, la acción producida por un trozo sobre el otro a través de la sección es lo que se conoce como **esfuerzo**. El concepto de esfuerzo en general es el equilibrio interno del cuerpo consecuencia de la acción y reacción entre sus diferentes partes. Para un conocimiento completo del estado de esfuerzos

en un cuerpo es necesario conocer el esfuerzo en cada uno de sus puntos.

Se considera cualquier área  $A$  en un plano dado, que contenga un punto  $O$ , en el interior del cuerpo. Se nota con  $U$  la normal a dicho plano. Se supone una fuerza que actúa desde la parte del cuerpo hacia donde se dirige  $U$  sobre la otra. Dicha fuerza que actúa a través del área  $A$  se supone estáticamente equivalente a una fuerza  $F$  actuando en el punto  $O$  en una dirección determinada, y un par  $G$ , en un determinado eje. Si se contrae el área  $A$  por un proceso continuo de manera que siempre este el punto  $O$  en su interior, la fuerza  $F$  y el par  $G$  tienden a cero, mientras que la dirección de la fuerza tiende a una dirección límite. Se considera que el cociente  $\frac{F}{A} = \frac{\text{número de unidades de la fuerza } F}{\text{número de unidades del área } A}$  tiende a un número distinto de cero, mientras que  $\frac{G}{A}$  tiende a cero.

Se define una cantidad vectorial con la dirección dada por el límite definido en el párrafo anterior (utilizando los cosenos directores), el módulo dado por el número  $\frac{F}{A}$ , y las dimensiones

$$[\text{MASA}] [\text{LONGITUD}]^{-1} [\text{TIEMPO}]^{-2}$$

Esta magnitud es una fuerza por unidad de área que se llama tracción. La tracción se realiza a través del plano (que tiene por normal  $U$ ) en el punto  $O$ . Notaremos por  $\Sigma_{u_1}, \Sigma_{u_2}, \Sigma_{u_3}$  las proyecciones de esta tracción sobre los ejes coordenados. La proyección sobre la normal  $U$  es

$$\Sigma_{u_1} \cos(u^1, U) + \Sigma_{u_2} \cos(u^2, U) + \Sigma_{u_3} \cos(u^3, U)$$

Si las componentes de la tracción son positivas se trata de tensión; si son negativas de presión.

A parte de la tracción existe otro tipo de esfuerzo que llamaremos **fuerzas de volumen** por actuar sobre elementos de volumen del cuerpo, a diferencia de las tracciones que actúan sobre una superficie. Ejemplo de fuerza de volumen es la fuerza de gravedad que actúa proporcionalmente a la masa del elemento de volumen considerado. Estas fuerzas no afectan para lo que nos proponemos por tanto supondremos que no actúan.

Ahora utilizaremos el método de Euler , más tarde se demostrará la relación existente con el método de Lagrange. La diferencia es tan pequeña que en casos de deformación y esfuerzo infinitesimal puede no tenerse en cuenta.

Con  $\Sigma_{ij}$ , notamos el tensor de esfuerzos, el índice  $i$  indica la normal al plano de referencia, así el 1 indica el plano  $v^2v^3$  (la normal es  $v^1$ ), y el índice  $j$  representa la dirección que tiene la componente del vector de esfuerzos. Por ejemplo la componente  $\Sigma_{32}$  es la proyección sobre la dirección del eje  $v^2$  del vector de esfuerzos que actúa a través del plano  $v^1v^2$ . Cuando dos índices son iguales se trata de una tracción normal y cuando son diferentes de una tracción de cizalladura, aquí es posible ver la idea intuitiva mejor que con las deformaciones. Se trata de un tensor simétrico y es debido a que no se han considerado los pares de fuerza. La demostración de que el tensor de esfuerzos es realmente un tensor (cumple las leyes de transformación correspondientes) puede verse en Frederick and Chang (1965).

Considerando el caso de dos dimensiones la fuerza  $F$  actuará a través de la longitud  $L$  de una recta dada. Así la tracción vendrá dada con módulo, unidades de fuerza de la fuerza  $F$  partido por unidades de longitud de  $L$ ; la dirección por la dirección límite y las dimensiones por

$$[MASA] [TIEMPO]^{-2}$$

El tensor de esfuerzos se reduce a

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad [174]$$

con el significado de antes, pero esta vez "a través del plano coordenado..." es "a través del eje ...".

De la misma manera que existe la cónica de deformación (apartado 4.3.4) existe la cónica de esfuerzos que se describe de forma análoga, ver Sokonikoff (1956) páginas 45 a 49.

#### 4.4 ELASTICIDAD APLICADA A LA CARTOGRAFIA

##### 4.4.1 Estudio del tensor de deformación con la métrica

Si consideramos dos espacios de Riemman S y T, tenemos

$$ds_S^2 = G_{ij} du^i du^j = (du)^T G (du) \quad [175]$$

$$ds_T^2 = g_{ij} dv^i dv^j = (dv)^T g (dv) \quad [176]$$

donde  $ds_S$  y  $ds_T$  son los elementos lineales,  $G_{ij}$ ,  $g_{ij}$  son los tensores métricos correspondientes y  $u^i, v^i$  podrían ser coordenadas curvilíneas. En negrilla hemos puesto su forma vectorial. Consideramos la correspondencia definida por  $u^i = u^i(v^k)$  con las características mencionadas en el apartado 4.3.6.

Para trabajar con las deformaciones estudiamos la diferencia

$$ds_T^2 - ds_S^2 \quad [177]$$

Se puede poner utilizando las coordenadas  $u^i$  o  $v^i$  y tendremos las aproximaciones lagrangiana o euleriana correspondientes, es decir,

$$\begin{aligned} ds_T^2 - ds_S^2 &= 2 E_{ij} du^i du^j \\ ds_T^2 - ds_S^2 &= 2 (du)^T E (du) \end{aligned} \quad [178]$$

donde  $E_{ij}$  es el tensor de deformación de Lagrange dado en (170), E representa su matriz definida por (Dermanis et al, 1983 b)

$$E = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right)^T g \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right) - G \right] \quad [179]$$

o bien

$$\begin{aligned} ds_T^2 - ds_S^2 &= 2 E_{ij}^* dv^i dv^j \\ ds_T^2 - ds_S^2 &= 2 (dv)^T E^* (dv) \end{aligned} \quad [180]$$

donde  $E^*$  es la matriz del tensor de deformación de Euler, definida en este caso

$$E^* = \frac{1}{2} \left[ g - \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)^T G \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] \quad [181]$$

A partir de la ecuación (178) se puede escribir

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = 1 + 2 E_{ij} \frac{du^i}{ds_s} \frac{du^j}{ds_s} \\ m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = 1 + 2 \left( \frac{du}{ds_s} \right)^T E \left( \frac{du}{ds_s} \right) \end{aligned} \quad [182]$$

y de (180)

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = 1 + 2 E_{ij}^* \frac{dv^i}{ds_s} \frac{dv^j}{ds_s} \\ m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = 1 + 2 \left( \frac{dv}{ds_s} \right)^T E^* \left( \frac{dv}{ds_s} \right) \end{aligned} \quad [183]$$

donde  $m$  es el módulo de deformación en la dirección del vector unitario  $\frac{du}{ds}$  o  $\frac{dv}{ds}$  según sea el caso lagrangiano o euleriano, respectivamente.

Si se pone

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{ds_s} \frac{du^j}{ds_s} &= 1 \\ \left( \frac{du}{ds_s} \right)^T \left( \frac{du}{ds_s} \right) &= 1, \end{aligned}$$

y las correspondientes para  $v$ , en la última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = \left( \delta_{ij} + 2 E_{ij} \right) \frac{du^i}{ds_s} \frac{du^j}{ds_s} \\ m^2 &= \left( \frac{du}{ds_s} \right)^T (I + 2E) \left( \frac{du}{ds_s} \right) \\ m^2 &= \frac{d s_I^2}{d s_s^2} = \left( \delta_{ij} + 2 E_{ij}^* \right) \frac{dv^i}{ds_s} \frac{dv^j}{ds_s} \end{aligned} \quad [184]$$

$$m^2 = \left( \frac{dv}{ds} \right)^T (I + 2E^*) \left( \frac{dv}{ds} \right) \quad [185]$$

que representa una forma cuadrática. La superficie asociada a esta forma cuadrática es el lugar geométrico de los puntos tales que  $m^2 = 1$ , resultando el elipsoide de deformación recíproco en tres dimensiones o la elipse recíproca en dos dimensiones, para el caso euleriano. De manera análoga resulta el elipsoide y la elipse de deformación en el método lagrangiano, esta última elipse es la conocida como elipse o indicatriz de Tissot.

Si suponemos que las variedades riemannianas son espacios euclídeos se pueden tomar coordenadas cartesianas en (175) y (176), de manera que es posible buscar unas  $u^i$  y  $v^i$  tales que se verifique

$$\begin{aligned} ds_s^2 &= \delta_{ij} du^i du^j = (du)^T I (du) \\ ds_r^2 &= \delta_{ij} dv^i dv^j = (dv)^T I (dv) \end{aligned}$$

y los tensores métricos se convierten en la unidad, las expresiones lagrangiana y euleriana del tensor de deformación (179) y (181) quedan

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} - \delta_{ij} \right) \\ E &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right)^T \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right) - I \right] \end{aligned} \quad [186]$$

$$\begin{aligned} E_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \right) \\ E^* &= \frac{1}{2} \left[ I - \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)^T \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] \end{aligned} \quad [187]$$

Es posible utilizar coordenadas curvilíneas en los espacios euclídeos y entonces las expresiones para los elementos lineales y tensores de deformación quedarían como en el caso de Riemman.

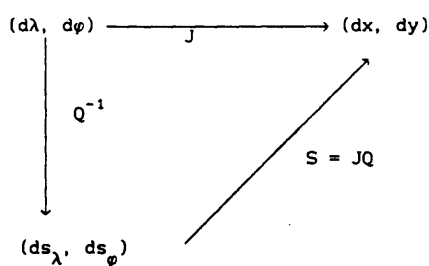
#### 4.4.2 Expresión del tensor de deformación con coordenadas cartográficas.

Consideremos las coordenadas esféricas  $(\lambda, \varphi)$ , las cartesianas del plano  $(x, y)$  y las coordenadas locales en el plano tangente  $(s_\lambda, s_\varphi)$ .



es decir,  $s_\lambda$  y  $s_\varphi$  son arcos medidos a lo largo de los paralelos y meridianos locales.

La correspondencia diferencial será:



donde  $S = JQ$  y

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\lambda, \varphi)}, \quad Q = \frac{\partial (\lambda, \varphi)}{\partial (s_\lambda, s_\varphi)}, \quad S = \frac{\partial (x, y)}{\partial (s_\lambda, s_\varphi)}.$$

De las relaciones en la esfera unitaria

$$ds_\varphi = d\varphi$$

$$ds_\lambda = \cos\varphi \, d\lambda$$

se tiene

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La aplicación  $(ds_\lambda, ds_\varphi) \longrightarrow (dx, dy)$  utiliza  $S$  que poniendola en (186) o (187) da

$$E = \frac{1}{2} (S^T S - I)$$

$$E^* = \frac{1}{2} (I - (S^{-1})^T S^{-1}) \quad [188]$$

#### 4.4.3 Dilatación y cizalladura en el caso euleriano.

Nos interesa el caso euleriano ya que en el estudio que estamos realizando se producen deformaciones finitas y por tanto ambos métodos van a ser diferentes. Dermanis y Livieratos (1983 a) hacen el estudio Lagrangiano, utilizan la matriz  $S^T S$  de donde obtienen los semiejes de la indicatriz de Tissot. Nosotros utilizaremos la matriz  $(S^{-1})^T S^{-1}$ . Matricialmente tenemos

$$\begin{pmatrix} ds_\lambda \\ ds_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad [189]$$

por otra parte

$$\begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad [190]$$

donde

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

sustituyendo (190) en (189) se tiene

$$\begin{pmatrix} ds_\lambda \\ ds_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \cos\varphi & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cos\varphi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

multiplicando ambos miembros de esta ecuación por su traspuesta queda

$$\begin{pmatrix} ds_\lambda & ds_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds_\lambda \\ ds_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \cos\varphi & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cos\varphi & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \cos\varphi & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cos\varphi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = ds_\lambda^2 + ds_\varphi^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cos^2\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \cos^2\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

[191]

la matriz central no es otra cosa que el tensor métrico si se recuerdan las operaciones realizadas en el apartado 3.4.

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy$$

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y} dy$$

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2 = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy \right)^2 + \cos^2\varphi \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y} dy \right)^2$$

operando en esta última ecuación se obtiene lo mismo que en (191), en ambos casos obtenemos las componentes del tensor métrico  $g_{ij}$  donde

$$g_{11} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \cos^2\varphi \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right)^2$$

$$g_{21} = g_{12} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cos^2\varphi \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial\lambda}{\partial y} \right)$$

$$g_{22} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \cos^2\varphi \left( \frac{\partial\lambda}{\partial y} \right)^2$$

Así la expresión (191) da la matriz  $(S^{-1})^T S^{-1}$  que se puede poner como

$$(S^{-1})^T S^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad [192]$$

y no es otra sino la matriz del tensor métrico que venimos estudiando. Los autovalores de (192) son

$$a_R^2 = \frac{g_{11} + g_{22} + \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2}$$

$$b_R^2 = \frac{g_{11} + g_{22} - \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2} \quad [193]$$

donde  $a_R$  y  $b_R$  son los semiejes de la elipse recíproca; están relacionados con los semiejes  $a_T$  y  $b_T$  de la elipse directa, pues si se compara (193) con la ecuación (88) se llega a

$$a_T^2 = \frac{a_R^2}{g} \quad b_T^2 = \frac{b_R^2}{g} \quad [194]$$

Sustituyendo (192) en (188) la matriz del tensor de deformación eulerina queda

$$E^* = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} - 1 & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} - 1 \end{pmatrix}$$

de donde se sacan los autovalores (los mismos de las expresiones (157)). No se considera el signo en  $E^*$ , es decir se estudia realmente  $ds_S^2 - ds_T^2$  más acorde con la idea intuitiva expresada hasta ahora, en realidad no es crítico para el estudio que pretendemos.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{g_{11} + g_{22} - 2 + \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{4} \\ \lambda_2 &= \frac{g_{11} + g_{22} - 2 - \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{4}\end{aligned}\quad [195]$$

Se sustituye ahora (195) en (157) y se obtienen las expresiones de  $\Delta_E$  y  $\gamma_E$  en función de los elementos del tensor métrico

$$\Delta_E = \frac{g_{11} + g_{22}}{2} - 1 \quad [197]$$

$$\gamma_E = \frac{\sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2} \quad [198]$$

Si se opera en (197) y (198) con (193) y (194) se llega a

$$\Delta_E = \frac{a_R^2 + b_R^2}{2} - 1 = g \frac{a_T^2 + b_T^2}{2} - 1 \quad [199]$$

$$\gamma_E = \frac{a_R^2 - b_R^2}{2} = g \frac{a_T^2 - b_T^2}{2} \quad [200]$$

#### 4.4.4 Dilatación y cizalladura en el caso lagrangiano.

Se hace de manera análoga al caso euleriano, ahora se trata de obtener la matriz  $S^T S$ , que como es una matriz simétrica  $g'_{12}$  y  $g'_{21}$  de la matriz (201), que se verá dentro de poco, son iguales; así pues nos da igual estudiar su traspuesta  $SS^T$ .

Según el diagrama del apartado 4.3.9

$$S = J Q$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$SS^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \end{pmatrix}$$

para simplificar llamaremos

$$SS^T = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} \quad [201]$$

donde

$$g'_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$g'_{21} = g'_{12} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$g'_{22} = \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

Se obtienen los autovalores de (201)

$$a_{\tau}^2 = \frac{g'_{11} + g'_{22} + \sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g'_{12}{}^2}}{2}$$

$$b_{\tau}^2 = \frac{g'_{11} + g'_{22} - \sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g'_{12}{}^2}}{2} \quad [202]$$

de donde

$$\left\{ \begin{matrix} a_{\tau}^2 \\ b_{\tau}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 - \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^2 + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} \quad [203]$$

De (188) la matriz del tensor lagrangiano es

$$E = \frac{1}{2} (S^T S - I)$$

O lo que es lo mismo, ya que  $S^T S$  es simétrica como se dijo antes

$$E = \frac{1}{2} (S S^T - I)$$

luego de la anterior resulta

$$E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g'_{11} - 1 & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} - 1 \end{pmatrix} \quad [204]$$

donde al sacar los autovalores obtenemos las fórmulas análogas a las (195)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{g'_{11} + g'_{22} - 2 + \sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g'^2_{12}}}{4} \\ \mu_2 &= \frac{g'_{11} + g'_{22} - 2 - \sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g'^2_{12}}}{4} \end{aligned} \quad [205]$$

la dilatación y la cizalladura para el caso lagrangiano quedan

$$\Delta_L = \frac{g'_{11} + g'_{22}}{2} - 1 \quad [206]$$

$$\gamma_L = \frac{\sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g'^2_{12}}}{2} \quad [207]$$

y si se ponen en función de los semiejes de la elipse de Tissot

$$\Delta_L = \frac{a_T^2 + b_T^2}{2} - 1 \quad [208]$$

$$\gamma_L = \frac{a_T^2 - b_T^2}{2} \quad [209]$$

#### 4.4.5 Relación entre los métodos euleriano y lagrangiano.

La matriz  $S^T S$  o  $S S^T$  indica la deformación que se ha producido desde el punto de vista de antes de la deformación. De esta manera un círculo de radio unidad alrededor de un punto en el estado sin deformar se convierte en una elipse en el estado deformado, los semiejes de esta elipse son los de Tissot. De esta manera resulta el estudio lagrangiano.

elipse son los de Tissot. De esta manera resulta el estudio lagrangiano. O bien se puede realizar el estudio recíproco y será el caso euleriano. Un círculo de radio unidad centrado en un punto del estado deformado se convierte en una elipse en el estado sin deformar, los semiejes de dicha elipse son los dados por los autovalores de la matriz  $(S^{-1})^T(S^{-1})$ .

Las matrices  $S S^T$  y  $(S^{-1})^T(S^{-1})$  son inversas

$$S S^T = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} \quad (S^{-1})^T S^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Puesto que para  $(S^{-1})^T S^{-1}$  se cumple que

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo  $g$  el determinante, por la unicidad de la matriz inversa debe ser

$$\begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \frac{g_{22}}{g} \\ g'_{12} &= -\frac{g_{12}}{g} \\ g'_{22} &= \frac{g_{11}}{g} \end{aligned} \quad [210]$$

Ahora partimos de (197) donde sustituimos (210), se tiene en cuenta (206) y queda

$$\begin{aligned} \Delta_E &= \frac{g'_{11} + g'_{22}}{2} - 1 = g \frac{g_{22} + g_{11}}{2} - 1 = g \frac{g_{11} + g_{22}}{2} - g + g - 1 = \\ &= g \Delta_L + g - 1 \end{aligned}$$

de donde

$$g = \frac{\Delta_E + 1}{\Delta_L + 1} \quad [211]$$

Análogamente para la cizalladura, partiendo de (198) con (209) resulta

$$\gamma_E = \frac{\sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4 g_{12}^2}}{2} = g \frac{\sqrt{(g'_{11} - g'_{22})^2 + 4 g_{12}'^2}}{2} = g \gamma_L$$

luego,

$$g = \frac{\gamma_E}{\gamma_L} \quad [212]$$

Cuando no hay cambio de área,  $g = 1$ ,  $\Delta_L$  y  $\Delta_E$  coinciden según (211), y lo mismo se puede decir de  $\gamma_L$  y  $\gamma_E$  con (212). Así pues la diferencia entre la cizalladura y la dilatación en los métodos lagrangiano y euleriano está en función del cambio de área que se experimenta.

Para entender la relación entre el estudio euleriano y lagrangiano es conveniente recordar la conexión del determinante del tensor métrico (ecuación (4)) con la deformación areolar. De (193) y (194) se obtiene

$$a_T^2 = \frac{g_{11} + g_{22} + \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4 g}}{2g} \quad [213]$$

$$b_T^2 = \frac{g_{11} + g_{22} - \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4 g}}{2g} \quad [214]$$

Entonces

$$a_T^2 b_T^2 = \frac{4 g}{4 g^2} = - \frac{1}{g}$$

de donde

$$a_T b_T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \quad \lambda$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \quad [215]$$

Al realizar operaciones con  $(a_T - b_T)^2$  y (208) y teniendo en cuenta la definición de  $\sigma$  del apartado 2.8, se llega a

$$\Delta_L = \sigma - 1 + \frac{(a_T - b_T)^2}{2} \quad [216]$$



Si utilizamos todo lo anterior salvo la ecuación (208) que sustituimos por (199) resulta

$$\Delta_E = \sigma g - 1 + \frac{(a_T - b_T)^2}{2} g \quad [217]$$

En las proyecciones conformes, donde  $a_T = b_T$ , la cizalladura  $\gamma$  se anula según (209) mientras que la dilatación  $\Delta$  representa la variación experimentada en el área; las ecuaciones (216) y (217) quedan utilizando (215)

$$\Delta_L = \sigma - 1 \quad [218]$$

$$\Delta_E = -1 - \frac{1}{\sigma} \quad [219]$$

Dermanis (1983 b) hace un estudio de la deformación relativa al pasar de un mapa a otro distinto, dando una expresión para la dilatación y la cizalladura relativa.

$\Delta$  representa la parte isótropa de la deformación, y la máxima cizalladura  $\gamma$  representa la parte anisótropa y la cizalladura a lo largo de la dirección de su máximo valor.

Dermanis (1983 b) construye una tabla con  $\Delta_L$  y  $\gamma_L$  para doce proyecciones importantes, aunque como se dijo antes, siempre con la aproximación lagrangiana.

Otra interesante medida de la deformación la constituye la energía de deformación que se puede considerar como la energía necesaria para convertir la superficie real en la representada en el mapa (la modificación física de dicha superficie)

#### 4.4.6 $\Delta$ y $\gamma$ en la teoría de segundo orden

Si se sustituyen las expresiones (106) del tensor métrico para las proyecciones perspectivas en las ecuaciones obtenidas para  $\Delta_E$  y  $\gamma_E$  (197) y (198) se tiene

$$\Delta_E = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 \quad [220]$$

$$\gamma_E = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{h} \right) R^2 \quad [221]$$

donde  $R^2 = x^2 + y^2$

Otra forma de hacer lo anterior sería utilizando las ecuaciones (199) y (200), en función de  $a_R$  y  $b_R$ , entonces en primer lugar debe calcularse  $a_R = \sqrt{g} a_T$  y  $b_R = \sqrt{g} b_T$ ,  $\sqrt{g}$  lo tomamos de (89) y  $a_T$  y  $b_T$  de (90). Entonces obtenemos  $\Delta_E$  y  $\gamma_E$  en función de los coeficientes de Chovitz. En efecto,

$$\Delta_E = \frac{(\sqrt{g}a_T)^2 + (\sqrt{g}b_T)^2}{2} - 1 \quad [222]$$

$$\gamma_E = \frac{(\sqrt{g}a_T)^2 - (\sqrt{g}b_T)^2}{2} \quad [223]$$

$$a_R = \sqrt{g} a_T = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{02} + \bar{a}_{22}^{02}) y^2 - \sqrt{\left[ \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} - \bar{a}_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{02} - \bar{a}_{22}^{02}) y^2 + (\bar{a}_{12}^{11} xy)^2 \right]} \quad [224]$$

$$b_R = \sqrt{g} b_T = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{02} + \bar{a}_{22}^{02}) y^2 + \sqrt{\left[ \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} - \bar{a}_{22}^{20}) x^2 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{02} - \bar{a}_{22}^{02}) y^2 + (\bar{a}_{12}^{11} xy)^2 \right]} \quad [225]$$

Ahora deben expresarse  $a_R$  y  $b_R$  en función del parámetro  $h$  de las proyecciones perspectivas. Con (224) y (225) se realizan operaciones análogas a las hechas por Chovitz con la fórmula (90) al tratar el problema de Milnor (apartado 4.2). Esto es, considerando en (224) y (225) las condiciones (81) tenemos

$$a_R = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) (x^2 + y^2) - \sqrt{\left[ \frac{1}{2} (\bar{a}_{12}^{11}) [x^2 + y^2] \right]^2}$$

$$b_R = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) (x^2 + y^2) + \sqrt{\left[ \frac{1}{2} (\bar{a}_{12}^{11}) [x^2 + y^2] \right]^2}$$

Tomando como siempre  $R^2 = x^2 + y^2$ , se tiene

$$a_R = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) R^2 - \frac{1}{2} \bar{a}_{12}^{11} R^2$$

$$b_R = 1 + \frac{1}{4} (\bar{a}_{11}^{20} + \bar{a}_{22}^{20}) R^2 + \frac{1}{2} \bar{a}_{12}^{11} R^2$$

Sustituyendo los valores (107) y (150) obtenemos

$$a_R = 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} \right) R^2$$

$$b_R = 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} \right) R^2$$

simplificando

$$a_R = 1 + \frac{R^2}{2h} \quad [226]$$

$$b_R = 1 + R^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2h} \right) \quad [227]$$

se sustituye (226) y (227) en (222) y (223) y se obtiene

$$\Delta_E = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{6}{h} + \frac{10}{h^2} \right) R^4 \quad [228]$$

$$\tau_E = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{h} \right) R^2 - \left( \frac{1}{h^2} + \frac{3}{4h} + \frac{1}{8} \right) R^4 \quad [229]$$

donde, como se dijo antes  $R^2 = x^2 + y^2$

De manera análoga se realiza el estudio lagrangiano y resulta

$$\Delta_L = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{6}{h} + \frac{10}{h^2} \right) R^4 \quad [230]$$

$$\tau_L = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{h} \right) R^2 - \left( \frac{1}{h^2} + \frac{3}{4h} + \frac{1}{8} \right) R^4 \quad [231]$$

que como se puede observar sólo se diferencian de las ecuaciones (228) y (229), sus correspondientes del método euleriano, en un signo.

#### 4.4.7 Ejemplo

*Estudio euleriano.*

En la proyección Plates Carrées, ya vista en el apartado 3.7.4, vamos a calcular la dilatación y cizalladura (casos euleriano y lagrangiano) para un punto situado en la latitud  $\varphi = 10^\circ$  y longitud  $\lambda = 15^\circ$ .

En primer lugar calcularemos los semiejes de la indicatriz de Tissot por un método que llamaremos directo. Partimos de las fórmulas de la proyección

$$x = \lambda$$

$$y = \varphi,$$

las derivamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 1 \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= 0\end{aligned}$$

y llamando

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$G = \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

resulta

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

Poniendo ahora,

$$h = \sqrt{E} = 1, \text{ y}$$

$$k = \frac{\sqrt{G}}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos 10} = 1.015426612,$$

se obtiene

$$(a_T + b_T)^2 = h^2 + k^2 + 2 h k$$

$$(a_T - b_T)^2 = h^2 + k^2 - 2 h k$$

El fundamento teórico de estos cálculos puede encontrarse en Mailing (1973). Con los valores numéricos queda,

$$a_T + b_T = 2.015426612$$

$$a_T - b_T = 0.015426612$$

luego

$$a_T = 1.015426612$$

$$b_T = 1$$

$$\Delta_E = \frac{a_T^2 + b_T^2}{2} g - 1 = -0.015076845$$

Otro procedimiento consiste en calcular las componentes del tensor métrico  $g_{ij}$

$$g_{11} = \cos^2 \varphi = 0.9698463104$$

$$g_{12} = 0$$

$$g_{22} = 1$$

$$g = \cos^2 \varphi = 0.984807753^2 = 0.9698463104$$

sustituir en (197) y obtener

$$\Delta_E = -0.015076845$$

*Estudio lagrangiano.*

Calculamos las componentes de  $g'_{ij}$

$$g'_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 10} = 1.031091204$$

$$g'_{21} = g'_{12} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$$

$$g'_{22} = \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 = 1$$

de la ecuación (206) obtenemos la dilatación lagrangiana

$$\Delta_L = 0.015545602$$

Obtenemos ahora los semiejes de la elipse directa (semiejes de la indicatriz de Tissot) con las fórmulas (203)

$$\begin{Bmatrix} a_T^2 \\ b_T^2 \end{Bmatrix} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi} + 1 \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)^2}}{2}$$

$$a_T^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1.031091204$$

$$b_T^2 = 1$$

de donde

$$a_T = 1.0154226612$$

$$b_T = 1$$

Para obtener los semiejes de la elipse recíproca basta con multiplicar los de la directa o de Tissot por  $\sqrt{g}$ , según (194)

$$a_R = 1$$

$$b_R = 0.984807753$$

Con las fórmulas (200) y (209) calculamos la cizalladura  $\gamma$

$$\gamma_E = 0.01554159024$$

$$\gamma_L = 0.01507684482$$

Con la teoría de segundo orden tenemos que calcular primero los semiejes de la indicatriz de Tissot

$$\begin{aligned}\varphi &= 10 & x &= 0.2617993878 \\ \lambda &= 15 & y &= 0.1745329252\end{aligned}$$

Se sustituye en (90) los valores de la matriz obtenida en el apartado 3.7.4

$$\begin{aligned}a_T &= 1 + \frac{1}{2} x^2 = 1.03426946 \\ b_T &= 1\end{aligned}$$

Para hallar los semiejes de la elipse recíproca se considera en (90) los dos primeros signos menos como mas

$$\begin{aligned}a_R &= 1 \\ b_R &= 1 - \frac{1}{2} x^2 = 0.9657305403\end{aligned}$$

#### 4.5 ENERGIA DE DEFORMACION

##### **4.5.1 Ley de Hooke.**

Esta es la ley que se da en la escuela elemental: la deformación es proporcional al esfuerzo realizado, y se pone el ejemplo de un muelle que se deforma alargandose bajo el efecto de un peso colocado en su extremo.

$$\Sigma = C E$$

donde C es una constante.

Esto representa el caso más sencillo de una dimensión, se generaliza fácilmente con la notación tensorial

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad [232]$$

que como estamos con la dimensión dos es i, j, k, l = 1,2. Hay 27 constantes elásticas del tipo  $C_{ijkl}$ . Un tratamineto más general puede verse por ejemplo en el capítulo tercero de Muskhelishvili (1953).

Si suponemos el medio homogéneo los coeficientes  $C_{ijkl}$  son independientes de la posición del punto de referencia en el medio y por tanto constantes. Se puede demostrar que son las componentes de un tensor de cuarto orden que se conoce con el nombre de **tensor elástico**. Considerando la simetría del tensor de esfuerzos, es decir  $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$ , entonces el tensor elástico tiene simetría respecto a los dos primeros índices:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} &= C_{ijkl} E_{kl} = \Sigma_{ji} = C_{jikl} E_{kl} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl}\end{aligned}\quad [233]$$

y al considerar la simetría del tensor de deformación, también resulta simétrico con respecto a los dos últimos índices (Saada, 1974):

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad [234]$$

Si se pone desarrollado queda

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= C_{1111} E_{11} + C_{1122} E_{22} + C_{1133} E_{33} \\ \Sigma_{22} &= C_{2111} E_{11} + C_{2222} E_{22} + C_{2333} E_{33} \\ \Sigma_{12} &= C_{3111} E_{11} + C_{3222} E_{22} + C_{3333} E_{33}\end{aligned}\quad [235]$$

donde se han utilizado, por sencillez, los coeficientes  $C_{ij}$  para notar las componentes del tensor  $C_{ijkl}$ . Se demuestra que estos coeficientes son simétricos  $C_{ij} = C_{ji}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ , ver página 189 del Saada (1974). El número de constantes se reduce de 9 a 6.

Si el medio elástico se considera que es el mismo en cualquier dirección, se llama **isótropo**. Un medio isótropo requiere que el tensor elástico no resulte afectado por la rotación de los ejes coordenados. Sea el tensor elástico que respecto a un sistema de referencia  $(v^1, v^2)$  se representa por  $C_{ijkl}$  y que respecto a otro sistema  $(v'^1, v'^2)$  por  $C'_{ijkl}$ .

Por una parte como  $C_{ijkl}$  representa un tensor de cuarto orden, la ley de transformación (Santaló, 1981) es

$$C_{pqrs} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} C'_{ijkl} \quad [236]$$

donde  $a_{mn} = \cos(v'^m, v'^n)$ .

Por otra parte el tensor elástico debe ser el mismo ante las rotaciones de los ejes, como se dijo más arriba

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} \quad [237]$$

De (236) y (237) se sigue la condición

$$C_{pqrs} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} C_{ijkl} \quad [238]$$

que sólomente se satisface si  $C_{ijkl}$  vale

$$C_{pqrs} = \lambda \delta_{pq} \delta_{rs} + \mu \delta_{pr} \delta_{qs} + \nu \delta_{ps} \delta_{qr} \quad [239]$$

donde  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  son constantes y  $\delta_{ij}$  es el tensor unidad.

Sustituyendo (239) en (238) se observa que se cumple la citada relación.

La simetría de  $C_{ijkl}$  con relación a los dos primeros y los dos últimos índices, mencionado más arriba (233) y (234), se pone como

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad [240]$$

Considerando la simetría del tensor unidad  $\delta_{ij}$  y utilizando (239) en (240) resulta que (238) sólo es posible si

$$(\nu - \mu)(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = 0 \quad [241]$$

Sea  $i = k$ ,  $j = l$  en (238). Entonces  $\delta_{ik} \delta_{jl} = 9$ ,  $\delta_{il} \delta_{jk} = 3$  es válido, y (238) es posible sólo cuando  $\nu - \mu = 0$ . De donde se sigue que  $\nu = \mu$ . El número de constantes para un medio homogéneo isótropo ha sido reducido a dos. Estas constantes se conocen con el nombre de **constantes elásticas de Lamé**  $\mu$  y  $\lambda$ . La ecuación (239) se escribe entonces

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jl} \delta_{ik}) \quad [242]$$



Utilizando esta última (242) en la ley de Hooke (232) se tiene

$$\Sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} E_{kl} + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jl} \delta_{ik} \right) E_{kl} \quad [243]$$

haciendo uso de las propiedades del tensor unidad queda

$$\Sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij} \quad [244]$$

que se trata de la ley de Hooke para cuerpos elásticos homogéneos e isotrópicos.

Desarrollando (244) se tiene

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \lambda \delta_{11} (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{11} \\ \Sigma_{22} &= \lambda \delta_{22} (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{22} \\ \Sigma_{12} &= \lambda \delta_{12} (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{12} \end{aligned} \quad [245]$$

aplicando las propiedades del tensor unidad  $\delta_{ij}$  se tiene

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \lambda (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{11} \\ \Sigma_{22} &= \lambda (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{22} \\ \Sigma_{12} &= 2\mu E_{12} \end{aligned} \quad [246]$$

#### 4.5.2 Energía de deformación

Cualquier superficie o porción de ella puede poseer energía de diferentes tipos. Si está en movimiento tiene **energía cinética**, que depende de la distribución de las masas y de la velocidad. En el caso de pequeños desplazamientos, que es lo que nos interesa, la energía cinética por unidad de área viene expresada con suficiente aproximación por la fórmula, sacada de su análoga en tres dimensiones.

$$\frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial d^1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial d^2}{\partial t} \right)^2 \right\}$$

en donde  $\rho$  indica la densidad de la superficie sin deformar (es decir masa por unidad de área) y  $t$  el tiempo.

A parte de la energía cinética que posee la superficie en bloque, la superficie tiene otra energía que depende de sus partes, es decir, de la configuración y de la temperatura de sus partes. Esta energía se llama energía interna. La energía total de cualquier porción de la superficie es la suma de la energía cinética e interna correspondiente a dicha porción. La energía total de la superficie es la suma de la energía total de todas las partes.

Al pasar la superficie de un estado a otro, la energía total, en general, es alterada. Pero la energía no depende sólo de las fuerzas externas que se puedan aplicar sino también del calor que se suministra o pierde en el proceso.

La primera ley de la termodinámica establece que el incremento total de energía de un cuerpo es igual a la suma del trabajo realizado por fuerzas externas y la cantidad de calor suministrada (Catalá, 1979, capítulo 19).

$$\iint (\delta T + \delta U) dv^1 dv^2 = \delta W + \delta Q$$

donde  $\delta T$  representa el incremento de energía cinética por unidad de área que se adquiere en un corto intervalo de tiempo.  $\delta U$  es el incremento de energía interna por unidad de área adquirida en el intervalo de tiempo.  $\delta W$  es el trabajo realizado por las fuerzas y  $\delta Q$  el calor suministrado en dicho intervalo de tiempo.

Se supone que el proceso es adiabático e isoterma, para lo que nos proponemos ni el calor ni la temperatura juegan ningún papel, por tanto se supone  $\delta Q = 0$ .

Una función  $W$ , que verifica la siguiente ecuación (ver Goodier and Timoshenko (1970) páginas 244 y 245 o Saada (1974) páginas 206 y 207),

$$W = \frac{1}{2} E_{ij} \Sigma_{ij} \quad [247]$$

donde  $\Sigma_{ij}$  son las componentes de las tensiones y  $E_{ij}$  las componentes de los esfuerzos, se llamará **energía de deformación**. Desarrollando (247)

$$W = \frac{1}{2} \left( E_{11} \Sigma_{11} + E_{22} \Sigma_{22} + 2 E_{12} \Sigma_{12} \right) \quad [248]$$

y sustituyendo en (248) las expresiones (246) se tiene

$$W = \frac{1}{2} \left\{ E_{11} \left[ \lambda (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{11} \right] + E_{22} \left[ \lambda (E_{11} + E_{22}) + 2\mu E_{22} \right] + 2 E_{12} 2\mu E_{12} \right\} \quad [249]$$

Utilizando (156) y (159) esto se escribe en la forma

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \Delta^2 - 2\mu E_{11} E_{22} + \frac{\mu}{2} \gamma^2$$

Para expresar  $W$  en términos de  $\Delta$  y  $\gamma$  se utiliza (156), (158) y (160) y la relación

$$- E_{11} E_{22} = \frac{1}{4} [(E_{11} - E_{22})^2 - (E_{11} + E_{22})^2]$$

o lo que es lo mismo

$$- E_{11} E_{22} = \frac{1}{4} (\gamma^2 - \Delta^2)$$

y resulta finalmente

$$W = \frac{\lambda + \mu}{2} \Delta^2 + \frac{\mu}{2} \gamma^2$$

$W$  aparece como función de la dilatación y de la máxima cizalladura.

Usemos un material caracterizado por la razón de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2 + (\lambda + \mu)} = \frac{1}{4}$$

Aunque no corresponde a ningún material real si nos interesa para nuestro propósito de comparación. Es más, tomaremos  $\lambda = \mu = 1$  ya que cambiará  $W$  sólo en el producto por una constante.

Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos poner:

$$W = \Delta^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \quad [250]$$

#### 4.6 PROYECCION CON MINIMA ENERGIA DE DEFORMACION W

##### 4.6.1 Obtención de la proyección con mínima energía de deformación.

Vamos a dar la expresión de W según la teoría de segundo orden. Al haber supuesto la simetría radial todos los puntos a la misma distancia R del centro necesitan la misma energía de deformación para transformarse.

En (250) sustituimos (220) y (221)

$$W = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + \frac{10}{h} + \frac{18}{h^2} \right) R^4 \quad [251]$$

Si se calcula el mínimo de W en (251) este resulta para  $h = -3.6$ . Este es sin duda el método más sencillo y rápido de obtener el mínimo para W euleriana. De todas formas para comprobación podemos realizar el estudio utilizando las fórmulas (199) y (200) que dan  $\Delta_E$  y  $\gamma_E$  en función de  $a_R$  y  $b_R$ , o sus equivalentes en segundo orden (228) y (229) que dan lo mismo en función de h (o (230) y (231) si utilizamos el método lagrangiano). Estudiamos con el método euleriano y por tanto sustituimos (228) y (229) en (250) y esta última queda de la forma

$$W = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4}{h} \right) R^2 + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{6}{h} + \frac{10}{h^2} \right) R^4 \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{h} \right) R^2 - \left( \frac{1}{h^2} + \frac{3}{4h} + \frac{1}{8} \right) R^4 \right]^2$$

para simplificar ponemos  $x = \frac{1}{h}$ . Operando

$$W = \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{2} x + \frac{9}{2} x^2 \right) R^4 - \left( \frac{3}{16} + \frac{7}{4} x + \frac{11}{2} x^2 + 6 x^3 \right) R^6 + \frac{1}{64} \left( \frac{3}{2} + 18x + 82x^2 + 168x^3 + 132x^4 \right) R^8 \quad [252]$$

Hay valor límite para el radio R dado en (152) cuando  $h > 0$  y  $h < -2$ , es decir cuando el punto de vista está fuera de la esfera, que corresponde a  $x \in (-1/2, +\infty)$ .

Consideremos el casquete esférico proyectado en el plano. Para calcular la energía de disipación total, en dicha transformación, hacemos la suma infinita por radios, desde el centro de la proyección hasta el extremo C. Dicho extremo viene dado por

$$C = \frac{\text{sen } q}{1 + x(1 - \cos q)}$$

que siempre será menor que el extremo máximo transformado del casquete esférico, dado por  $\sqrt{\frac{1}{1+2x}}$

$$W_{\text{TOTAL}} = 2\pi \int_0^R \left[ \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}x^2 \right) R^4 - \left( \frac{3}{16} + \frac{7}{4}x + \frac{11}{2}x^2 + 6x^3 \right) R^6 + \frac{1}{64} \left( \frac{3}{2} + 18x + 82x^2 + 168x^3 + 132x^4 \right) R^8 \right] R dR$$

Si se calcula la integral y sustituye el valor de C queda

$$W_{\text{TOTAL}} = 2\pi \left[ \frac{1}{48} \left( 3 + 20x + 36x^2 \right) R^4 \frac{\text{sen}^6 q}{(1 + x(1 - \cos q))^6} - \frac{1}{128} \left( 3 + 28x + 88x^2 + 96x^3 \right) R^6 \frac{\text{sen}^8 q}{(1 + x(1 - \cos q))^8} + \frac{1}{1280} \left( 3 + 36x + 164x^2 + 336x^3 + 264x^4 \right) \frac{\text{sen}^{10} q}{(1 + x(1 - \cos q))^{10}} \right] \quad [253]$$

Para la búsqueda del mínimo se ha utilizado el método numérico conocido como de la sección de oro ( páginas 312 a 318 del Press et al, (1989)). El programa informático en TURBOPASCAL para la búsqueda de mínimo de (253) se da en el anexo. El resultado dependiendo del valor extremo que se tome se encuentra entre -3.6 y -3.7.

Considerar el método euleriano o lagrangiano no va a presentar diferencias notables en el estudio de la energía de deformación, ya que debido a que la dilatación y cizalladura se elevan al cuadrado los signos en que se diferencian sólo afectan a términos de orden superior. Dado que nuestro estudio es con la teoría de segundo orden ambos métodos dan  $h = -3.6$  para la mínima energía de deformación.

El valor de  $h$  encontrado al hacer mínima la función que expresa la energía  $W$  en función de  $h$  dada en (251), se sustituye en las fórmulas (107) con lo que obtenemos los valores correspondientes a los coeficientes de Chovitz, que puestos en la forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} 0.16 & 0 & -0.28 \\ 0 & 0.22 & 0 \\ -0.28 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}$$

#### 4.6.2 Propiedades generales

La proyección que hace mínima la energía de deformación no es conforme, ni equivalente, ni tiene líneas automeclicas como se puede comprobar con las ecuaciones (77), (78) y (79). Ya que  $a_{12}^{11} = 0.22$ , que es distinto de cero, la proyección tampoco es ortogonal. Se comprueba con (76) y (82) que tiene simetrías de tipo axial y radial.

Al sustituir en (90) se obtienen los semiejes de la indicatriz de Tissot:

$$a = 1 + 0.027(x^2 + y^2) + \sqrt{0.11(x^2 - y^2)^2 + (0.22xy)^2}$$

$$b = 1 + 0.027(x^2 + y^2) - \sqrt{0.11(x^2 - y^2)^2 + (0.22xy)^2}$$

Si se sustituye en (95) obtenemos las direcciones para dichos semiejes

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{ext}} = \frac{-0.443x^2 + 0.443y^2 \pm 4R}{0.88xy}$$

donde

$$R = \sqrt{0.11(x^2 - y^2)^2 + (0.22xy)^2}$$

La alteración en los ángulos viene dada al sustituir R y C, que viene dado por

$$C = 1 + 0.0277 (x^2 + y^2)$$

en (97)

$$\omega = \sqrt{\frac{R}{C^2 - R}}$$

Finalmente la alteración en las áreas viene dada por (99)

$$\sigma = 1 + 0.055 (x^2 + y^2)$$

#### 4.6.3 Coordenadas de la proyección

Si sustituimos en (143) los valores correspondientes de la matriz obtenida, obtenemos la transformación de coordenadas locales (x, y), en coordenadas geográficas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) hasta el tercer orden

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{x}{\rho_0} - \frac{3 \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{2 \rho_0} x - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2 \rho} (1 - \eta_0^2) y + \\ + \frac{0.026}{\rho_0^3} x^3 + \frac{-0.28 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2 \rho_0^3} x y^2$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{y}{\nu_0 \cos \varphi_0} + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\nu_0^2 \cos \varphi_0} x y + \frac{0.16 - 2 \operatorname{tg} \varphi_0}{6 \nu_0^3 \cos \varphi_0} y^2 + \\ + \frac{0.723 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2 \nu_0^3 \cos \varphi_0} x^2 y$$

donde la nomenclatura es la misma que en el apartado 3.11. De manera análoga sustituyendo en (144) se tienen las fórmulas inversas

$$(\lambda, \varphi) \longrightarrow (x, y)$$

$$\frac{x}{\rho_0} = \Delta \varphi + \frac{3 \eta_0^3 \operatorname{tg} \varphi_0}{2} (\Delta \varphi)^2 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{2} (1 + \eta_0^2) (\Delta \lambda)^2 - \\ - 0.026 (\Delta \varphi)^3 + \frac{-0.28 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2} \cos^2 \varphi_0 \Delta \varphi (\Delta \lambda)^2$$

$$\frac{y}{\nu_0 \cos \varphi_0} = \Delta\lambda - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\nu_0 + 1} \Delta\varphi \Delta\lambda - \frac{0.16 + \operatorname{tg} \varphi_0}{6} \cos^2 \varphi_0 (\Delta\lambda)^2 -$$

$$- 0.361 (\Delta\varphi)^2 \Delta\lambda$$



## 5 APLICACION Y CONCLUSIONES

= =====

### 5.1 DIFERENCIA ENTRE LAS FORMULAS DIRECTAS Y LAS DE SEGUNDO ORDEN.

Nos interesa conocer que grado de aproximación se obtiene cuando se utiliza la teoría de Chovitz de segundo orden en lugar de las fórmulas directas de la proyección, siempre que ello sea posible, ya que como sabemos la teoría de Chovitz ofrece la posibilidad de crear nuevas proyecciones para las que no existía fórmula de tipo alguno. Hemos confeccionado un programa informático en lenguaje TURBO-PASCAL que permitirá realizar dicho estudio: en primer lugar se selecciona una proyección y un origen en ella, posteriormente el programa pide las coordenadas geográficas de un punto sobre la esfera para dar las coordenadas cartesianas sobre el plano, tanto en su forma directa como utilizando la teoría de segundo orden, en las dos últimas columnas da la diferencia entre dichas coordenadas, todo esto se puede comprobar examinando el listado del programa en el anexo a esta memoria. En realidad más que un punto hay que facilitarle un intervalo para las coordenadas geográficas, con un determinado paso que indicará el número de puntos a estudiar; resulta de esta manera lo primero, el estudio de un punto, un caso particular de lo segundo, estudio de un intervalo al que se le da amplitud cero.

En las tablas 1 a 11 se ha tomado como latitud y longitud inicial  $\varphi = 40^\circ$  y  $\lambda = 0^\circ$ , salvo en las proyecciones Cilíndrica Equivalente, Mercator Ecuatorial y de Sanson-Flansteed que por las características específicas de estas proyecciones se ha tomado  $\varphi = 0^\circ$  y  $\lambda = 0^\circ$ . La amplitud del intervalo seleccionada ha sido, en todos los casos, de  $30^\circ$  para la latitud y  $40^\circ$  para la longitud, el paso que se ha tomado es de  $5^\circ$  para ambas coordenadas.

Si consideramos por ejemplo que la representación se realiza sobre papel de un metro de ancho por uno de largo, las coordenadas cartesianas, dadas por las tablas citadas más arriba, tendrían por unidad el metro; ello significa que cuando representemos una zona de  $30^\circ$  para la latitud y  $40^\circ$  para la longitud el máximo error que se produciría, al utilizar coordenadas calculadas con la teoría de segundo

orden en lugar de con las fórmulas directas, sería por ejemplo de 1 mm para la Azimutal Equivalente (tabla 1). El error que se produce a consecuencia de la impresión sobre el papel del mapa (cuando se utiliza papel) es del orden de los 3 mm, así pues da lo mismo utilizar la teoría de segundo orden o las fórmulas directas, en este caso concreto. Lo mismo puede decirse de la Azimutal Equivalente, Mercator, Gnomónica, Policónica o Sanson-Flansteed, basta observar las tablas, en algunas incluso el intervalo podría tomarse mayor, como es el caso de la proyección Sanson-Flansteed en la que parece darse el mejor ajuste de todas las proyecciones para las que se ha realizado la tabla, dentro de los intervalos mencionados.

Evidentemente es posible con el programa anexo a esta memoria confeccionar otras tablas, establecer el origen en cualquier lugar que no sea un punto singular para la proyección, y utilizar las amplitudes que se deseen, así como los pasos para estas. Resultando de esta manera una gama infinita de posibilidades.

Al observar las tablas se comprueba que la diferencia entre las coordenadas, en segundo orden y directas, es menor cuando los valores están cercanos al origen elegido para realizar la proyección ( $\varphi = 40^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  o  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$ ), aumentando según los valores se alejan de él.

Otra vía para realizar la comparación es con el submenú retículas. Con éste se ofrece la posibilidad que una vez realizada la retícula de una proyección se pueda comparar con la correspondiente en segundo orden; esta última aparecerá sobrepuesta a la primera, representada por una línea de puntos. Cuando los puntos no aparecen es que el ajuste ha sido perfecto en lo que se refiere a las posibilidades de la pantalla. Con el submenú retículas se aprecia mucho mejor lo dicho más arriba, esto es, que el ajuste siempre es mejor cuanto más cerca se está del origen de la proyección, que por otra parte coincide con el centro de la pantalla en todos los casos. Resultado lógico si se tiene en cuenta que el fundamento de la teoría de segundo orden es el desarrollo por Taylor del tensor métrico.

Para realizar las retículas se ha utilizado la misma idea que para las tablas, como puede comprobarse en el listado del programa del anexo; la diferencia está que en lugar de presentar los valores

númericos de las coordenadas en pantalla o sacarlos por impresora se les traduce en "pixels" sobre la pantalla. Resulta obvio que de esta manera se pierde la precisión que ofrecen los valores numéricos, pero por otra parte se gana en lo que se refiere a disponer de una manera rápida, y de un sólo vistazo de la bondad del ajuste de la proyección representada en segundo orden con respecto a su correspondiente con las fórmulas directas, lo que puede ser suficiente para seleccionar, o rechazar, un determinado ajuste.

Para tener una idea clara de lo que se representa sobre la pantalla (o sobre el papel) podemos suponer que se realiza la proyección de una Tierra esférica de  $6.4 \times 10^6$  m sobre un cuadrado de 0.20 m de lado (que son aproximadamente las dimensiones de la retícula representada), suponemos también que la retícula representa una zona de amplitud  $20^\circ$ , tanto para la latitud como para la longitud. Con estas suposiciones se esta realizando una representación de la zona correspondiente de la Tierra a una escala aproximada de 1/2.000.000. Por supuesto al hacer uso de la opción que permite aumentar o reducir la retícula la escala variará, habrá que multiplicarla o dividirla por el número que represente el aumento o reducción correspondiente. Cuando tenemos una retícula y sobrepuesta a ella su correspondiente de segundo orden tenemos lo que resultaría al representar en el mapa con las fórmulas directas o con las correspondientes en segundo orden. Esto resultará suficiente, en nuestra opinión, para determinar de manera categórica, en la mayoría de los casos, si se acepta o rechaza una determinada proyección de segundo orden como ya se apuntó antes. Un hecho muy importante a tener en cuenta es que debido a los "pixels" del monitor se presentará una imagen deformada de las retículas, aunque es posible reformar el programa fuente con una rutina para evitar dicho efecto no se ha hecho ya que resulta con total fidelidad la copia impresa, como las retículas que se presentan al final, en el Apéndice III.

## 5.2 ESTUDIO DE LAS PROYECCIONES CON LAS PROPIEDADES ELASTICAS.

Otra posibilidad que se ofrece con el programa informático anexo es la de estudiar la dilatación, la cizalladura y la energía de deformación en las proyecciones conocidas más importantes o bien en las

creadas con la teoría de la presente memoria.

La posibilidad de utilizar el método euleriano o lagrangiano va a permitir un conocimiento mas profundo de la proyección que se quiera estudiar. Resulta interesante observar como mientras con el método euleriano la dilatación resulta negativa, con el método lagrangiano es positiva. Utilizar el método euleriano es estudiar el proceso de deformación desde la superficie inicial, sin deformar, hasta convertirse en la superficie final deformada; o por el contrario utilizar el método lagrangiano sería situarnos en la superficie ya deformada y desde allí observar el proceso de modificación de esta en la superficie inicial sin deformación, dada la conexión existente entre la dilatación y la deformación areolar, el utilizar un método u otro para la dilatación se traduce en observar como una superficie se estira para convertirse en la otra o como se encoge la segunda para convertirse en la primera, este proceso de alargamiento o contracción es lo que provoca el signo más o menos. Los gráficos 1 y 2 presentan la dilatación en la misma proyección (Mercator Directa) pero con el estudio lagrangiano y euleriano. En general alargamiento y contracciones se producirán en la misma proyección dentro del mismo método resultando más complicado todo lo dicho, aunque se podría intentar aplicar la misma idea intuitiva.

Para entender lo que significan los gráficos tridimensionales, que representan, las propiedades elásticas se utilizará el caso de dilatación euleriana, se extiende fácilmente a los casos de la dilatación lagrangiana o la cizalladura y energía en ambos métodos, resulta totalmente análogo. El plano XY del sistema tridimensional representa el plano correspondiente del mapa; como lo que se representa es un casquete esférico se supone que la zona representada queda comprendida en un círculo en el plano del mapa. Cada punto (x,y) del mapa le corresponde una dilatación euleriana concreta, ya que se trata de una función de punto escalar, la magnitud de esa dilatación se representa por la coordenada z. El conjunto de todos los puntos (x,y,z) forman una superficie en el sistema tridimensional que representa la magnitud de la dilatación, de una manera global, sobre el mapa, o mejor, como se ha dicho sobre un círculo de radio uno en el plano XY, así las magnitudes tienen carácter absoluto, nos interesa estudiar la dilatación en una proyección de manera global.

La cizalladura vale cero cuando se estudia la familia de las proyecciones conformes; la superficie que representa la cantidad de energía de deformación, lugar geométrico de los puntos  $(x,y,z)$ , se reduce a un plano que coincide con el XY, como se puede observar en el gráfico 3, que representa la cizalladura euleriana en la proyección estereográfica. Con la energía de deformación nunca puede suceder esto, que valga cero, como fácilmente se desprende de la ecuación (251); es por eso que hemos buscado la proyección que la hiciera mínima, dentro de las perspectivas y centrales, dicha proyección de mínima energía de deformación encontrada en esta memoria presenta el gráfico 4 para la energía euleriana de deformación, lo que al dar una superficie casi plana ofrece una comprobación intuitiva de los desarrollos teóricos. Si se prueba a obtener la energía de deformación para proyecciones conocidas, así como para otras creadas con la matriz  $A_2$ , se observa que siempre es mayor que la presentada en este trabajo para  $h = -3.6$ .

Resultan muy ilustrativos los gráficos 5 y 6 mostrando la energía de deformación en las proyecciones de Mercator directa y transversa, se puede ver como la energía aumenta al alejarse de la línea en que el cilindro es tangente a la esfera, eje X o Y según el caso. También se puede observar como la energía crece de manera uniforme en todas direcciones en la proyección ortográfica (gráfico 7); o de forma no simétrica para una proyección que se ha creado con la teoría de segundo orden con esas características (gráfico 8).

Dada la relación de la dilatación y la cizalladura con la deformación en las áreas y los ángulos, presenta gran importancia el estudio de estas propiedades para el conocimiento de las características de una proyección determinada. Creemos que la utilización del programa de la presente memoria puede ayudar a dicho estudio en una primera aproximación, y si se desea un estudio más profundo utilizar las ecuaciones facilitadas en este trabajo. De la misma manera la energía de deformación, con la idea intuitiva que lleva asociada, es de gran utilidad en el conocimiento de una proyección determinada.

Como ejemplos de aplicación en cartografía temática se pueden ver los siguientes:

- Si se quiere representar en un mapa la densidad de población, y para ello se utilizan números que indican el número de individuos,

puestos en distintas zonas; esta claro que interesa una proyección equivalente o que la dilatación valga lo menos posible, sino en todo el mapa al menos en el área de estudio.

- Si en la escuela elemental el profesor muestra el mapa de España a los alumnos interesa que se presente de la manera más fiel posible la forma del país, que tengan una representación lo más clara posible de lo que realmente es España. Para logra este objetivo parece lógico que se busque un mapa con mínima energía de deformación, por la idea intuitiva que conlleva y que ya se ha apuntado. Se ha elegido España ya que por la amplitud pequeña que necesita (  $5^\circ$  ) resulta ideal en la teoría de segundo orden.

Los ejemplos serían innumerables. Se dice a menudo lo fácil que es "engañar" con las estadísticas, al hacer las unidades de unos ejes más largos o más cortos que los otros, a consecuencia de ello los gráficos sufren grandes deformaciones. Lo mismo se puede decir de los mapas temáticos: una proyección determinada puede hacer que los países parezcan más grandes o pequeños de lo que en realidad son, con una forma u otra, ect. Estudiando las propiedades citadas podríamos conocer como en una determinada proyección varía el área, los ángulos y la deformación en general.

### 5.3 PROGRAMA INFORMATICO.

El programa aplica la teoría de la memoria de la que es anexo y sirve para confirmar los resultados que allí se obtienen. Podemos distinguir tres bloques principales: Gráficos, Reticulas y Tablas. Estos tres bloques los confeccionamos en un principio como bloques independientes para más tarde convertirlos en unidades de programación, ficheros TPU en TURBOPASCAL (Borland, 1990 (a)).

Hemos puesto en una unidad independiente las fórmulas de las proyecciones y que hemos llamado Proyecc.TPU, de esta manera se ha evitado repetirlas en los bloques Reticulas y Tablas. Se utilizan las unidades HardCopy y HPCopy para imprimir los gráficos y retículas producidos por el programa, dichas unidades no pertenecen a los autores del presente trabajo sino que fueron facilitadas por P. Tioux de Borlan France. De la misma manera los ficheros en que se apoyan los gráficos (BGI) y los caracteres (CHR) pertenecen a Borlan, pero permite su

distribución con los programa propios según aparece en la página 149 de la guía del programador (Borlan, 1990 (b)). El menú principal nos ofrece tres posibilidades de elección: Tablas, Retículas y Gráficos.

#### 5.3.1 Tablas

Cuando se elige esta opción el programa presenta un grupo de proyecciones conocidas para que se seleccione una. Realizada dicha selección se pide la latitud y longitud de un punto que se tomará como origen, salvo que en la proyección, por sus características particulares ya se considere uno concreto. Seguidamente hay que facilitar la amplitud deseada para la latitud y longitud, así como el paso correspondiente. El programa procede de la manera siguiente: deja fija la latitud y comienza por el valor más pequeño del intervalo para la longitud, va incrementando esta según el paso facilitado por el usuario hasta que completa un recorrido completo sobre el intervalo de la longitud, seguidamente incrementa la latitud en su paso correspondiente y vuelve a repetir el proceso con la longitud, todo continúa hasta dar una lista de valores que están repartidos en ambos intervalos (latitud y longitud). Es importante tener esto en cuenta a la hora de dar valores, pues la amplitud del intervalo dado para la latitud dividido por su paso y multiplicado por la amplitud del intervalo correspondiente a la longitud dividido por el suyo da el número de líneas impresas que se obtendrán.

Para cada par de valores correspondientes a la latitud y a la longitud el programa calcula con las fórmulas directas de la unidad PROYECC.TPU las coordenadas correspondientes para compararlas con las obtenidas en segundo orden, fórmulas que también se encuentran en la misma unidad PROYECC.TPU. En la última columna se da la diferencia entre dichas coordenadas. Esto permite ver para una zona determinada la bondad del ajuste cuando se utiliza la teoría de segundo orden, es con esta parte del programa que se han logrado las tablas que aparecen al final, en el Apéndice II.

#### 5.3.2 Retículas

Al seleccionar esta opción aparece un menú con dos nuevas opciones: La primera permite realizar la retícula de una de las

proyecciones que se presentan en pantalla al seleccionar esta opción, y que son las mismas de la unidad Tablas. El programa realiza las mismas preguntas que Tablas y en lugar de confeccionar la tabla realiza el gráfico de la proyección, es decir la retícula; como ya se ha dicho en esta memoria, lo que realmente se hace es convertir las coordenadas numéricas en "pixels" de pantalla. La retícula que aparece corresponde a las líneas transformadas de los meridianos y paralelos de la proyección en la zona seleccionada por los intervalos. Se ofrece la posibilidad de ampliar o reducir la retícula (zoom) aplicando el factor correspondiente, por ejemplo, si se desea ampliar cinco veces la retícula que facilita el programa en ese momento, basta pulsar el 5 o si se desea reducirla 10 veces se pone 0.1, seguidamente el programa ofrece la posibilidad de comparar con la correspondiente retícula obtenida con las fórmulas de la teoría de segundo orden que, como se dijo más arriba, se encuentran en la unidad PROYECC.TPU. Las retículas realizadas con la teoría de segundo orden se dibujan con puntos para diferenciarlas de las que se obtienen con las fórmulas directas. En la mayoría de los casos las primeras se superponen a las segundas de manera que es posible compararlas fácilmente. Finalmente se ofrece la posibilidad de imprimirlas.

Si se selecciona la opción dos en el menú de retículas el programa pide la matriz de coeficientes. Los valores que se introduzcan deben cumplir las condiciones de las que se han hablado en esta memoria. No se han establecido de manera automática por si se quiere estudiar razones de simetría dando valores a unos coeficientes determinados e imponiendo las condiciones sobre otros. El resultado es análogo al de la otra opción una vez facilitados los intervalos y los pasos se obtiene la retícula correspondiente. Se advierte sobre la imposibilidad de que la retícula que aparezca no pertenezca a una proyección real si no se han impuesto las condiciones correspondientes mencionadas más arriba.

De esta manera se pueden generar una gama infinita de retículas para proyecciones. Se puede buscar la forma de la retícula que se acomode a las necesidades concretas del usuario. Se aconseja comenzar dando pequeños valores para los intervalos ya que de otra manera la retícula podría superponerse sobre si misma.

En el apéndice III se encuentran las veinte retículas



referenciadas en el capítulo tercero, en dicho apéndice pueden apreciarse las características aludidas más arriba.

### 5.3.3 Gráficos

Esta unidad sirve para estudiar las propiedades elásticas aplicadas a la cartografía. Ya que cuando se consideran deformaciones finitas la diferencia entre el método euleriano y lagrangiano es significativa nos ha parecido oportuno que el programa presentara dicha opción en el primer menú. Una vez que el usuario se ha decidido por uno de los métodos se le pide que seleccione la propiedad a estudiar: Cizalladura, Dilatación o Energía. El menú siguiente permite estudiar proyecciones conocidas, dando alguna propiedad de antemano o simplemente facilitando los coeficientes de la matriz  $A_2$ . Si se selecciona la primera opción aparece una lista de proyecciones más amplia que la ofrecida en Tablas y Retículas. Si se selecciona la opción que corresponde a una proyección cumpliendo una determinada propiedad aparecen una serie de propiedades: conformidad, ortogonalidad, etc.; en las que una vez seleccionada una de ellas el programa pedirá valores para la matriz de coeficientes según los grados de libertad correspondientes. En los gráficos 9 y 10 se ha representado la energía euleriana de una proyección conforme en la que se ha dado el valor 1 al único grado de libertad ( $a_{11}^{00}$ ), se observan desde distinta perspectiva utilizando los ángulos de Euler; en los gráficos de 11 a 15 se da la deformación de otras proyecciones construidas en base a alguna de otras propiedades mencionadas más arriba. Finalmente, es posible, seleccionando la tercera de las opciones, construir la proyección con la matriz de coeficientes sin considerar ninguna propiedad, aquí se recuerda de nuevo que hay que imponer las condiciones correspondientes.

Una vez seleccionada cualquiera de las tres opciones, el programa pregunta los ángulos de Euler para los ejes coordenados. Se aconsejan unos determinados que son los que aparecen en casi todos los gráficos ofrecidos al final de la memoria. A veces puede interesar conocer la deformación que se produce según una dirección determinada, esto se puede conseguir dando los valores apropiados a los ángulos de Euler.

El menú que aparece después de los ángulos de Euler permite

dibujar con distintos tipos de líneas, en los gráficos de 16 a 20 se ha dibujado la deformación correspondiente a la misma proyección, la proyección gnomónica, con los cinco tipos de línea diferentes. Según cada caso particular un tipo de línea permitirá apreciar mejor unos detalles que otros.

Antes de realizar el gráfico aparece un recordatorio (así se le ha llamado en el programa fuente) de todas las selecciones realizadas a través de los menús correspondientes, ya que estos son numerosos nos ha parecido que serviría de ayuda.

El tiempo que necesita el programa para realizar el gráfico depende del tipo de línea elegida, la más rápida es la representación por puntos y la más lenta la de cruce de líneas; por supuesto en mayor medida el tiempo necesario para la representación depende del hardware concreto del ordenador que se esté utilizando, puede ser de media o una hora en algunos XT hasta un minuto o dos en algunos AT(386).

La realización del gráfico se puede interrumpir pulsando cualquier tecla, hemos ofrecido esa posibilidad no sólo por si el usuario se cansa de esperar sino para el caso en que se quiera apreciar algún detalle que de otra manera no sería posible, por ejemplo interrumpir el gráfico en la mitad para ver como queda la línea de la propiedad correspondiente (dilatación, cizalladura o energía) según el eje X. Esta opción como la de selección de unos ángulos de Euler distintos de los recomendados, probablemente se realice en una segunda vuelta utilizando el menú final que permite volver a la mayor parte de los menús anteriores.

#### 5.4 CONCLUSIONES

La matriz  $A_2$  no sólo resulta adecuada para realizar la clasificación de las proyecciones cartográficas sino para la creación de nuevas proyecciones, si queremos una proyección que verifique ciertas propiedades, compatibles con la representación de una esfera sobre un plano, se asignan valores a los términos de  $A_2$  según las fórmulas (63) a (69). Ocho de los nueve términos de  $A_2$  pueden ser elegidos libremente, a causa de la condición de curvatura.

El programa ilustra lo señalado en el párrafo anterior así como un estudio de la deformación según el criterio de la energía de deformación, la dilatación o la cizalladura, y éstas según los métodos de Euler o de Lagrange. En las proyecciones en que la cizalladura es nula (proyecciones conformes), la dilatación y la energía de deformación pueden ser criterios para comparar las proyecciones dentro de las proyecciones de la familia conforme.

La teoría de segundo orden muestra una visión general y unificada de las proyecciones cartográficas aunque a costa de una pérdida en la precisión. Es una teoría que ofrece amplia información, muy útil en mapas de escala  $1:10^6$  o mayor, pero que no será suficiente, en general, para estudios de tipo geodésico; en resumen, es una teoría amplia pero no profunda, al menos si limitamos el desarrollo a los términos de segundo grado. El programa informático permite comparar las fórmulas directas con las correspondientes de segundo grado, bien numéricamente con las tablas del final, bien gráficamente con las retículas, siempre que se quiera pueden verse superpuestas las dos retículas ( la directa y la de seg. ord.), con lo que siempre conocemos el error que se comete. Cuando se trate de una proyección nueva creada con la teoría de esta memoria siempre cabe realizar una extrapolación.

Como aplicación es interesante observar la similitud entre ciertas proyecciones al coincidir la matriz  $A_2$ . Estas proyecciones mostrarán la misma deformación en los gráficos confeccionados con el programa anexo.

Otra aplicación de esta teoría la tenemos en el cálculo de mínima deformación, que Chovitz realiza según el criterio de Milnor y nosotros según el criterio de la elasticidad de A. Dermanis y E. Livieratos. Dicho desarrollo teórico se ve confirmado por los gráficos que se pueden construir con el programa informático.

Hoy día la aplicación de técnicas informáticas resulta imprescindible en casi todas las ramas de la cartografía; con el programa que presentamos, confirmando la teoría desarrollada, resulta posible un estudio más profundo de la cartografía al utilizar nuevas propiedades provenientes de la teoría de la elasticidad de una manera que no era posible antes del advenimiento de dichas técnicas, debido a

la complejidad de las fórmulas resultantes. El programa del Anexo resulta de gran utilidad no sólo para la cartografía matemática sino para la cartografía temática también. Esa pérdida de precisión a la que nos referíamos más arriba se ve compensada de esta manera por su aplicación tan amplia, al ser posible una generalización del tipo que se ha presentado.

Como conclusión final podemos decir que la aportación de la presente memoria se da en tres campos, a saber:

- Estudio de nuevas propiedades elásticas.
- Búsqueda de mínimo según dichas propiedades, en concreto resulta interesante para la energía de deformación.
- Aplicación de técnicas informáticas para profundizar en el conocimiento de las proyecciones cartográficas, presentando su estudio de una manera compacta y unificada.

## REFERENCIAS

=====

- AIRY G.B. (1861), Explanation of a Projection by Balance of Errors for Maps applying to a very large extent of the Earth's Surface; and compararison of this projections with other projections. Philosophical Magazine and Journal of Science, s. 4 Vol 22 n 149 pag 409-421
- ALEKSANDROV A.D., KOLMOGOROV A.N. y otros (1979), La matemática: su contenido, método y significado. Alianza Universidad. Madrid.
- AMALVICT M., E. LIVIERATOS (1988), Surface Mapping of a Rotational Reference Ellipsoid onto a Triaxial Counterpart through Strain Parameters. Manuscripta Geodaetica 13, 133-138.
- ANDREWS H.J. (1938), A round-the-world map on Airy's projection. Geographical Journal, vol XCII, 537-538.
- ARMY MAP SERVICE (1965), Zone to Zone Transformation Tables. AMS Technical Manual no. 50.
- BERNASCONI C. (1953), Carte Geografiche secondo il Modello della Membrana Elastica. Geofisica Pura e Applicata v. 26, 16-19.
- BERNASCONI C. (1956), Rappresentazioni parziali e totali dell'ellipsoide di rrotazione sulla sfera. Geofisica Pura e Applicata vol. 33, 1-8.
- BHATIA A.B. and SINGH R.N. (1986), Mechanics of deformable media. I.O.P. Publishing Ltd. Bristol
- BIRKHOFF G., Mac LANE (1980), Algebra Moderna, Vicens-Vives, Barcelona.
- BOCCHIO F. (1978), Some Marussi's Contributions in the Field of Two-Dimensional and Three-Dimensional Representations. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 2-3, 441-450.
- BONIFACINO B. (1966), Sull'impiego della rappresentazione di Gauss per il calcolo sul piano di reti ellissoidiche di notevoli dimensioni. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1, 57-73
- BCNIFACINO B. (1967), Nuova forma delle formule di corrispondenza di una rappresentazione conforme. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 3, 345-351.
- BORLAND (1990), TURBOPASCAL Versión 6.0 User's Guide. Borland Internacinal. Scotts Valley (USA).
- BORLAND (1990), TURBOPASCAL Versión 6.0 Programmer's Guide. Borland Internacinal. Scotts Valley (USA).
- BOYER C.B. (1986), Historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid.
- BOZZI M., GREGORI A. (1966), Rappresentazione conforme del geoide sull' ellissoide internazionale. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1, 25-36.
- CARTAN E. (1946), Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris.
- CATALA J. (1979), Física. Fundación García Muñoz. Madrid.
- CLARKE R.E. and JAMES H. (1862), On Projections for Maps applying a very large extent of the Earth's Surface. Philosophical Magazine, CLIV, 306-312.

- COLVORESSES A.P. (1985), Comment and Discussion. Surveying and Mapping.
- CUENIN R. (1972), Cartographie Générale. Eyrolles. Paris.
- CHOQUET-BRUHAT Y. (1968), Géométrie différentielle et systèmes extérieurs. Dunod, Paris.
- CHOVITZ B.H. (1952), Classification of map projections in terms of the metric tensor to the second order. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 4, 379-394.
- CHOVITZ B.H. (1954), Some applications of the classification of map projections in terms of the metric tensor to the second order. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1, 47-67.
- CHOVITZ B.H. (1956), A general formula for ellipsoid -to- ellipsoid mapping. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1, 1-20.
- CHOVITZ B.H. (1978), Perspective projections in terms of the metric tensor to the second order. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 2-3, 451-463.
- CHOVITZ B.H. (1979), A general theory of map projections. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 3, 457-479.
- CHOVITZ B.H. (1985), Comment and Discussion. Surveying and Mapping, 361-362.
- DERMANIS A., E. LIVIERATOS (1983 a), Dilatation, shear, rotation and energy analysis of map projections. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1, 53-58.
- DERMANIS A., E. LIVIERATOS, I. PARASCHAKIS (1983 b), Application of strain criteria in cartography. Bulletin Geodesique, 57, 215-225.
- DERMANIS A., E. LIVIERATOS, (1983 c), Applications of deformation analysis in geodesy and geodynamics. Reviews of Geophysics and Space Physics, 21, 41-50.
- DERMANIS A., E. LIVIERATOS, S. PERTSINIDOV (1984), Deformation analysis of geoid to ellipsoid mapping. Quaterniones Geodaesiae, v4 n3, 225-240.
- DRIENCOURT J., J. LABORDE (1932), Traité des Projections des Cartes Géographiques. Hermann, Paris.
- FIELD N.J. (1980), Conversions between geographical and transverse Mercator coordinates. Survey Review 195, 228-230.
- FREDERICK D. and SUN T. (1965), Continuum Mechanics. Allyn and Bacon, Boston.
- GOODIER J.N. and TIMOSHENKO (1970), Theory of Elasticity. Third edition. Mc Graw-Hill. New York.
- GOUGENHEIM A. (1950), Sur une nouvelle famille de planisphères conformes. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 4, 435-452.
- GOUGENHEIM A. (1951), Sur une généralisation des mappemondes. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 3, 339-350.
- GRAFAREND E. W. and LOHSE P. (1991), The minimal distance mapping of the topographic surface onto the (reference) ellipsoid of revolution. Manuscripta geodaetica, 16, 92-110.
- JAEGER J.C. (1969), Elasticity, Fracture and Flow. Chapman & Hall. Londres.

- KACHANOV L.M. (1971), Foundations of the Theory of Plasticity. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- KLINGENBERG W. (1982), Riemannian Geometry. Walter de Gruyter, New York.
- LANDAU L.D. and LIFSHITZ E.M. (1986), Theory of Elasticity. Pergamon Press, Oxford.
- LEE L.P. (1974), The computation of conformal projections. Survey Review, 172, 245-256.
- LEIPHOLZ (1974), Theory of elasticity. Noordhoff International Publishing. Leyden.
- LEVALLOIS J.J. (1970), Géodésie Générale. Eyrolles, Paris.
- LEVI-CIVITA T. (1927), The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors). Blackie & Son Limited. London and Glasgow.
- MARUSSI A. (1950), Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque su di una superficie pure qualunque. Acc. Naz. Lincei, vol VIII, fasc. 4.
- MAILING D.H. ( 1973 ) Coordinate Systems and Map Projections George Philip & Son Ltd., London. ( Segunda edición 1980).
- MAINARDI M. (1972), Generalità sulle rappresentazioni conformi. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 4, 493-500.
- MILNOR J. (1969), A problem in cartography. American Mathematical Monthly, 76, 10, 1101-1112.
- MURNAGHAN F.D. (1951), Finite Deformation of an Elastic Solid. Chapman and Hall, Limited. London.
- MUSKHELISHVILI N.I. (1953), Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd, Groningen (Holanda).
- LIPSCHUTZ M.M. (1970), Teoría y Problemas de Geometría Diferencial. Mc Graw-Hill, Mexico.
- LOVE A.E.H. (1927), The Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press, New York.
- NOVOZHILOV V.V. (1953), Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock Press, New York.
- OLLIVER J.G. (1981), A zone to zone transformation method for the Universal Transverse Mercator grid ( Claske 1880. Spheroid). Survey Review v. 26, 199, 36-44.
- O'NEILL B. (1966), Geometría diferencial. Limusa, México. (1ª edición en castellano, 1982 ).
- O'KEEFE J.A. (1953), The isoparametric method of mapping one ellipsoid on another. Transactions, American geophysical Union. v. 34, n. 6, 869-875.
- OTERO J., SEVILLA M. J. (1990), On the optimal choice of the standard parallels for a conformal conical projection. Bollettino de Gedesia e Scienze Affini, 1-14.
- PEARSON, F. (1990): Map projections theory and applications. CRC Press. Boca Raton. Florida. EUU.
- PRESCOTT W. H., SAVAGE J. C., KINOSHITA T. (1979), Strain accumulation rates in the western United States between 1970 y 1978. Geophysics Review, 84, 5423-5435.
- PRESS W.H., BRIAN B.P., TEUKOLSKY S.A. and VETTERLING W.T. (1989),

- Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. Cambridge.
- RAISZ, E. (1972), Cartografía. Omega. Barcelona.
- REILLY W. I. (1973), A conformal mapping projection with minimum scale error. Survey Review, 168, 57-70.
- REILLY W. I., H. M. BIBBY (1975), A conformal mapping projection with minimum scale error-part 2 : Scale and convergence in projection coordinates. Survey Review, 176, 79-86.
- REILLY W. I., H. M. BIBBY (1976), A conformal mapping projection with minimum scale error-part 3 : Transformation of coordinates and examples of use. Survey Review, 181, 302-314.
- SAADA A.S. (1974), Elasticity Theory and Applications. Pergamon. New York.
- SANJUAN A. (1983), Análisis, formulación matemática y Construcción Geométrica de las Proyecciones Perspectivas. Tesinas de la Facultad de Ciencias Matemáticas (Departamento de Geodesia y Astronomía), Madrid.
- SANSO F. (1974): Carta conforme di minima deformazione areale e suo confronto con la carta di Gauss. Bollettino de Geodesia e Scienze Affini, 1, 93-100.
- SANTALO L.A. (1977), Vectores y Tensores con sus Aplicaciones. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires.
- SERVICIO GEOGRAFICO DEL EJERCITO (1971), Apuntes de Cartografía, Escuela de Topografía y Geodesia. Madrid.
- SERVICIO GEOGRAFICO DEL EJERCITO (1976), Proyección Universal Transversa Mercator. Servicio Geográfico del Ejército. Madrid.
- SEVILLA M. J. (1986), Cartografía matemática. Instituto de Astronomía y Geodesia ( UCM-CSIC), Topografía y Cartografía. v 3 fascículo 6. Madrid.
- SHILGALIS T.W. (1977), Maps: Geometry in geography. Mathematics Teacher, 400-404.
- SHMUTTER B. (1981), Transforming conic conformal to TM coordinates. Survey Review, v 26, 201, 130-136.
- SMITH J.R. (1986), From plane to spheroid: Determining the figure of the earth from 3000 B.C. to the 18th century. Landmark-Enterprise. Cordova, California
- SOKOLNIKOFF S.I. (1956), Mathematical Theory of Elasticity, Second Edition. McGraw-Hill, New York.
- SOMMERFELD A. (1950), Mechanics of Deformable Bodies, Vol II de Lectures on Theoretical Physics. Academia Press Inc. New York.
- STEERS, J.A. (1949): An introduction to the study of map projections. University of London Press Ltd. Londres.
- STOUGHTON H. W. (1982), Simple Algorithms for calculation of scale factors for transverse Mercator systems. Survey review, v 26.
- STOUGHTON H. W., BERRY R. M. (1985). Simple Algorithms for calculation of scale factors for plane coordinate systems. Surveying and mapping.
- STRUIK D. J. (1955), Geometría diferencial clásica. Aguilar. Madrid



(Tercera Edición 1973).

- TIMOSHENKO S.P. and GOODIER J.N. (1970), Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York (Tercera Edición).
- TISSOT (1880), *Mémoire sur la representation des surfaces et les projections des cartes géographiques*. Gauthier-Villars, París.
- TONOLO (1939), *Sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 543-552.
- TURTURICI L., VASSALLO A. (1974), *Considerazioni sull'isogonismo o non delle principali proiezioni cartografiche e su alcuni procedimenti operativi*. Bollettino di Geodesia e scienze Affini, 4, 407-422.
- VINCENTY T. (1985), *Precise determination of the scale factor from Lambert conical projection coordinates*. Surveying and Mapping, v 45 n 4, 315-318.
- VINCENTY T. (1986), *Use of Polynomial coefficients in conversions of coordinates on the Lambert conformal conic projection*. Surveying and Mapping, v 46 n 1, 15-18.
- WILLIAMS W.B.P. (1982), *The transverse Mercator projection simple but accurate formulae for small computers*. Survey Review 26, 307-320.
- ZAKATOV P. S. (1981), *Curso de Geodesia Superior*, Mir, Moscú.

## APENDICE I

### FORMULA DE SIMETRIA RADIAL

En (74) teníamos

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + a_{11}^{20} x^2 + 2a_{11}^{11} x y + a_{11}^{02} y^2 + \dots \\ g_{12} &= a_{12}^{20} x^2 + 2a_{12}^{11} x y + a_{12}^{02} y^2 + \dots \\ g_{22} &= 1 + a_{22}^{20} x^2 + 2a_{22}^{11} x y + a_{22}^{02} y^2 + \dots \end{aligned}$$

y como tomamos coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

Veamos como queda el elemento lineal  $ds^2$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2 = \\ &= \left( 1 + a_{11}^{20} x^2 + 2a_{11}^{11} x y + a_{11}^{02} y^2 \right) (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta)^2 + \\ &\quad + 2 \left( a_{12}^{20} x^2 + 2a_{12}^{11} x y + a_{12}^{02} y^2 \right) (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) + \\ &\quad + \left( 1 + a_{22}^{20} x^2 + 2a_{22}^{11} x y + a_{22}^{02} y^2 \right) (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta)^2 = \\ &= \cos^2 \theta d\rho^2 - 2\rho \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + a_{11}^{20} \rho^2 \cos^4 \theta d\rho^2 - \\ &\quad - 2a_{11}^{20} \rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\rho d\theta + a_{11}^{20} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta^2 + \\ &\quad + 2a_{11}^{11} \rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta d\rho^2 - 4a_{11}^{11} \rho^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho d\theta + \\ &\quad + 2a_{11}^{11} \rho^4 \cos \theta \sin^3 \theta d\theta^2 + a_{11}^{02} \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho^2 - \\ &\quad - 2a_{11}^{02} \rho^3 \cos \theta \sin^3 \theta d\rho d\theta + a_{11}^{02} \rho^4 \sin^4 \theta d\theta^2 + 2a_{12}^{20} \rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta d\rho^2 + \\ &\quad + 2a_{12}^{20} \rho^3 \cos^4 \theta d\rho d\theta - 2a_{12}^{20} \rho^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho d\theta - 2a_{12}^{20} \rho^4 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta^2 + \\ &\quad + 4a_{12}^{11} \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho^2 - 4a_{12}^{11} \rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\rho d\theta - \\ &\quad - 4a_{12}^{11} \rho^3 \cos \theta \sin^3 \theta d\rho d\theta + 4a_{12}^{02} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta^2 + \\ &\quad + 2a_{12}^{02} \rho^2 \cos \theta \sin^3 \theta d\rho^2 + 2a_{12}^{02} \rho^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho d\theta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2a_{12}^{02}\rho^3 \sin^4\vartheta \, d\rho \, d\vartheta - 2a_{12}^{02}\rho^4 \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\rho^2 - \\
& - 2\rho \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta + \rho^2 \cos^2\vartheta \, d\vartheta^2 + 2a_{22}^{20}\rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \, d\rho^2 + \\
& + 2a_{22}^{20}\rho^3 \cos^3\vartheta \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta + a_{22}^{20}\rho^4 \cos^4\vartheta \, d\vartheta^2 + 2a_{22}^{11}\rho^2 \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, d\rho^2 + \\
& + 4a_{22}^{11}\rho^3 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \, d\rho \, d\vartheta + 2a_{22}^{11}\rho^4 \cos^3\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta^2 + a_{22}^{02} \rho^2 \sin^4\vartheta \, d\rho^2 - \\
& - 2a_{22}^{02} \rho^3 \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, d\rho \, d\vartheta + a_{22}^{02} \rho^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + H \rho^2 &= \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + a_{11}^{20} \rho^2 \cos^4\vartheta + 2 a_{11}^{11} \rho^2 \cos^3\vartheta \sin\vartheta + \\
& + 2a_{11}^{11} \rho^2 \cos^3\vartheta \sin\vartheta + a_{11}^{02} \rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2a_{12}^{20} \rho^2 \cos^3\vartheta \sin\vartheta + \\
& + 4a_{12}^{11} \rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2a_{12}^{02} \rho^2 \cos\vartheta \sin^3\vartheta + 2a_{22}^{20} \rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \\
& + 2a_{22}^{11} \rho^2 \cos\vartheta \sin^3\vartheta + 2a_{22}^{02} \rho^2 \sin^4\vartheta = \\
& = 1 + \left( a_{11}^{20} \cos^4\vartheta + 2a_{11}^{11} \cos^3\vartheta \sin\vartheta + a_{11}^{02} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \right. \\
& + 2a_{12}^{02} \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 4a_{12}^{11} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2a_{12}^{02} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + \\
& \left. + a_{22}^{20} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2a_{22}^{11} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + a_{22}^{02} \sin^4\vartheta \right) \rho^2
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
H &= a_{11}^{20} \cos^4\vartheta + 2 \left( a_{12}^{20} + a_{11}^{11} \right) \cos^3\vartheta \sin\vartheta + \left( a_{11}^{02} + 4a_{12}^{11} + a_{22}^{20} \right) \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \\
& + 2 \left( a_{12}^{02} + a_{22}^{11} \right) \cos\vartheta \sin^3\vartheta + a_{22}^{02} \sin^4\vartheta \\
2I\rho^3 &= 2 \left( -a_{11}^{20} \cos^3\vartheta \sin\vartheta - 2a_{11}^{11} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - a_{11}^{02} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + a_{12}^{20} \cos^4\vartheta - \right. \\
& - a_{12}^{20} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + 2a_{12}^{11} \cos^3\vartheta \sin\vartheta - 2a_{12}^{11} \cos\vartheta \sin^3\vartheta + \\
& \left. + a_{12}^{02} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta - a_{12}^{02} \sin^4\vartheta + a_{22}^{20} \cos^3\vartheta \sin\vartheta + 2a_{22}^{11} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta + \right.
\end{aligned}$$

por tanto I vale

de la misma manera

finalmente J vale

172

## APENDICE II

## T A B L A S



# Azimutal Equivalente

Latitud inicial 40.00 Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.31603	-0.22806	-0.31580	-0.22680	-0.00024	-0.00126
25.0	-15.0	-0.23803	-0.24249	-0.23799	-0.24179	-0.00004	-0.00071
25.0	-10.0	-0.15916	-0.25280	-0.15920	-0.25249	0.00004	-0.00032
25.0	-5.0	-0.07973	-0.25899	-0.07976	-0.25891	0.00004	-0.00008
25.0	0.0	-0.00000	-0.26105	0.00000	-0.26105	-0.00000	-0.00000
25.0	5.0	0.07973	-0.25899	0.07976	-0.25891	-0.00004	-0.00008
25.0	10.0	0.15916	-0.25280	0.15920	-0.25249	-0.00004	-0.00032
25.0	15.0	0.23803	-0.24249	0.23799	-0.24179	0.00004	-0.00071
30.0	-20.0	-0.30037	-0.14205	-0.30004	-0.14148	-0.00034	-0.00057
30.0	-15.0	-0.22629	-0.15616	-0.22617	-0.15584	-0.00013	-0.00032
30.0	-10.0	-0.15134	-0.16624	-0.15132	-0.16610	-0.00002	-0.00014
30.0	-5.0	-0.07582	-0.17229	-0.07582	-0.17226	0.00001	-0.00004
30.0	0.0	-0.00000	-0.17431	0.00000	-0.17431	-0.00000	-0.00000
30.0	5.0	0.07582	-0.17229	0.07582	-0.17226	-0.00001	-0.00004
30.0	10.0	0.15134	-0.16624	0.15132	-0.16610	0.00002	-0.00014
30.0	15.0	0.22629	-0.15616	0.22617	-0.15584	0.00013	-0.00032
35.0	-20.0	-0.28313	-0.05599	-0.28275	-0.05582	-0.00038	-0.00016
35.0	-15.0	-0.21336	-0.06965	-0.21320	-0.06957	-0.00016	-0.00009
35.0	-10.0	-0.14272	-0.07942	-0.14267	-0.07938	-0.00005	-0.00004
35.0	-5.0	-0.07150	-0.08528	-0.07150	-0.08528	-0.00000	-0.00001
35.0	0.0	-0.00000	-0.08724	0.00000	-0.08724	-0.00000	-0.00000
35.0	5.0	0.07150	-0.08528	0.07150	-0.08528	0.00000	-0.00001
35.0	10.0	0.14272	-0.07942	0.14267	-0.07938	0.00005	-0.00004
35.0	15.0	0.21336	-0.06965	0.21320	-0.06957	0.00016	-0.00009
40.0	-20.0	-0.26435	0.02996	-0.26393	0.03000	-0.00042	-0.00004
40.0	-15.0	-0.19927	0.01686	-0.19909	0.01687	-0.00018	-0.00001
40.0	-10.0	-0.13332	0.00750	-0.13327	0.00750	-0.00005	-0.00000
40.0	-5.0	-0.06680	0.00187	-0.06680	0.00187	-0.00001	-0.00000
40.0	0.0	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
40.0	5.0	0.06680	0.00187	0.06680	0.00187	0.00001	-0.00000
40.0	10.0	0.13332	0.00750	0.13327	0.00750	0.00005	-0.00000
40.0	15.0	0.19927	0.01686	0.19909	0.01687	0.00018	-0.00001
45.0	-20.0	-0.24408	0.11563	-0.24359	0.11582	-0.00050	-0.00020
45.0	-15.0	-0.18404	0.10322	-0.18383	0.10332	-0.00021	-0.00010
45.0	-10.0	-0.12316	0.09435	-0.12309	0.09438	-0.00006	-0.00004
45.0	-5.0	-0.06172	0.08902	-0.06171	0.08903	-0.00001	-0.00001
45.0	0.0	0.00000	0.08724	0.00000	0.08724	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06172	0.08902	0.06171	0.08903	0.00001	-0.00001
45.0	10.0	0.12316	0.09435	0.12309	0.09438	0.00006	-0.00004
45.0	15.0	0.18404	0.10322	0.18383	0.10332	0.00021	-0.00010
50.0	-20.0	-0.22236	0.20083	-0.22171	0.20148	-0.00064	-0.00064
50.0	-15.0	-0.16771	0.18925	-0.16742	0.18959	-0.00029	-0.00035
50.0	-10.0	-0.11226	0.18095	-0.11216	0.18110	-0.00010	-0.00015
50.0	-5.0	-0.05626	0.17597	-0.05624	0.17601	-0.00002	-0.00004
50.0	0.0	0.00000	0.17431	0.00000	0.17431	0.00000	0.00000
50.0	5.0	0.05626	0.17597	0.05624	0.17601	0.00002	-0.00004
50.0	10.0	0.11226	0.18095	0.11216	0.18110	0.00010	-0.00015
50.0	15.0	0.16771	0.18925	0.16742	0.18959	0.00029	-0.00035

Tabla 1

## Azimutal Equidistante

Latitud inicial 40.00

Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.31807	-0.22953	-0.31736	-0.22833	-0.00071	-0.00120
25.0	-15.0	-0.23919	-0.24368	-0.23890	-0.24297	-0.00029	-0.00070
25.0	-10.0	-0.15976	-0.25375	-0.15968	-0.25343	-0.00008	-0.00032
25.0	-5.0	-0.07997	-0.25979	-0.07997	-0.25971	-0.00000	-0.00008
25.0	0.0	0.00000	-0.26180	0.00000	-0.26180	0.00000	0.00000
25.0	5.0	0.07997	-0.25979	0.07997	-0.25971	0.00000	-0.00008
25.0	10.0	0.15976	-0.25375	0.15968	-0.25343	0.00008	-0.00032
25.0	15.0	0.23919	-0.24368	0.23890	-0.24297	0.00029	-0.00070
30.0	-20.0	-0.30177	-0.14271	-0.30117	-0.14222	-0.00060	-0.00049
30.0	-15.0	-0.22701	-0.15666	-0.22676	-0.15636	-0.00026	-0.00030
30.0	-10.0	-0.15166	-0.16660	-0.15159	-0.16645	-0.00007	-0.00014
30.0	-5.0	-0.07593	-0.17255	-0.07592	-0.17251	-0.00001	-0.00004
30.0	0.0	0.00000	-0.17453	0.00000	-0.17453	0.00000	0.00000
30.0	5.0	0.07593	-0.17255	0.07592	-0.17251	0.00001	-0.00004
30.0	10.0	0.15166	-0.16660	0.15159	-0.16645	0.00007	-0.00014
30.0	15.0	0.22701	-0.15666	0.22676	-0.15636	0.00026	-0.00030
35.0	-20.0	-0.28412	-0.05618	-0.28363	-0.05611	-0.00049	-0.00007
35.0	-15.0	-0.21381	-0.06980	-0.21360	-0.06974	-0.00021	-0.00006
35.0	-10.0	-0.14288	-0.07951	-0.14282	-0.07948	-0.00006	-0.00003
35.0	-5.0	-0.07154	-0.08533	-0.07153	-0.08532	-0.00001	-0.00001
35.0	0.0	0.00000	-0.08727	0.00000	-0.08727	0.00000	0.00000
35.0	5.0	0.07154	-0.08533	0.07153	-0.08532	0.00001	-0.00001
35.0	10.0	0.14288	-0.07951	0.14282	-0.07948	0.00006	-0.00003
35.0	15.0	0.21381	-0.06980	0.21360	-0.06974	0.00021	-0.00006
40.0	-20.0	-0.26514	0.03005	-0.26473	0.03000	-0.00041	0.00005
40.0	-15.0	-0.19960	0.01689	-0.19942	0.01687	-0.00018	0.00002
40.0	-10.0	-0.13342	0.00750	-0.13337	0.00750	-0.00005	0.00000
40.0	-5.0	-0.06681	0.00188	-0.06681	0.00187	-0.00001	0.00000
40.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
40.0	5.0	0.06681	0.00188	0.06681	0.00187	0.00001	0.00000
40.0	10.0	0.13342	0.00750	0.13337	0.00750	0.00005	0.00000
40.0	15.0	0.19960	0.01689	0.19942	0.01687	0.00018	0.00002
45.0	-20.0	-0.24483	0.11598	-0.24447	0.11611	-0.00036	-0.00013
45.0	-15.0	-0.18438	0.10341	-0.18423	0.10349	-0.00016	-0.00008
45.0	-10.0	-0.12328	0.09444	-0.12324	0.09448	-0.00005	-0.00004
45.0	-5.0	-0.06175	0.08906	-0.06174	0.08907	-0.00001	-0.00001
45.0	0.0	0.00000	0.08727	0.00000	0.08727	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06175	0.08906	0.06174	0.08907	0.00001	-0.00001
45.0	10.0	0.12328	0.09444	0.12324	0.09448	0.00005	-0.00004
45.0	15.0	0.18438	0.10341	0.18423	0.10349	0.00016	-0.00008
50.0	-20.0	-0.22320	0.20159	-0.22285	0.20222	-0.00035	-0.00063
50.0	-15.0	-0.16816	0.18975	-0.16801	0.19011	-0.00015	-0.00035
50.0	-10.0	-0.11247	0.18130	-0.11243	0.18145	-0.00004	-0.00016
50.0	-5.0	-0.05634	0.17622	-0.05634	0.17626	-0.00000	-0.00004
50.0	0.0	0.00000	0.17453	0.00000	0.17453	0.00000	0.00000
50.0	5.0	0.05634	0.17622	0.05634	0.17626	0.00000	-0.00004
50.0	10.0	0.11247	0.18130	0.11243	0.18145	0.00004	-0.00016
50.0	15.0	0.16816	0.18975	0.16801	0.19011	0.00015	-0.00035

Tabla 2



# Cilindrica Equivalente

Latitud inicial		Longitud inicial		Diferencia	
0.00		0.00			
Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord	
-15.0	-20.0	-0.34907	-0.25882	-0.33001	-0.27775
-15.0	-15.0	-0.26180	-0.25882	-0.24984	-0.27077
-15.0	-10.0	-0.17453	-0.25882	-0.16767	-0.26579
-15.0	-5.0	-0.08727	-0.25882	-0.08417	-0.26280
-15.0	0.0	0.00000	-0.25882	0.00000	-0.26180
-15.0	5.0	0.08727	-0.25882	0.08417	-0.26280
-15.0	10.0	0.17453	-0.25882	0.16767	-0.26579
-15.0	15.0	0.26180	-0.25882	0.24984	-0.27077
-10.0	-20.0	-0.34907	-0.17365	-0.33666	-0.18517
-10.0	-15.0	-0.26180	-0.17365	-0.25482	-0.18051
-10.0	-10.0	-0.17453	-0.17365	-0.17099	-0.17719
-10.0	-5.0	-0.08727	-0.17365	-0.08583	-0.17520
-10.0	0.0	0.00000	-0.17365	0.00000	-0.17453
-10.0	5.0	0.08727	-0.17365	0.08583	-0.17520
-10.0	10.0	0.17453	-0.17365	0.17099	-0.17719
-10.0	15.0	0.26180	-0.17365	0.25482	-0.18051
-5.0	-20.0	-0.34907	-0.08716	-0.34065	-0.09258
-5.0	-15.0	-0.26180	-0.08716	-0.25781	-0.09026
-5.0	-10.0	-0.17453	-0.08716	-0.17298	-0.08860
-5.0	-5.0	-0.08727	-0.08716	-0.08682	-0.08760
-5.0	0.0	0.00000	-0.08716	0.00000	-0.08727
-5.0	5.0	0.08727	-0.08716	0.08682	-0.08760
-5.0	10.0	0.17453	-0.08716	0.17298	-0.08860
-5.0	15.0	0.26180	-0.08716	0.25781	-0.09026
0.0	-20.0	-0.34907	0.00000	-0.34198	0.00000
0.0	-15.0	-0.26180	0.00000	-0.25881	0.00000
0.0	-10.0	-0.17453	0.00000	-0.17365	0.00000
0.0	-5.0	-0.08727	0.00000	-0.08716	0.00000
0.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	5.0	0.08727	0.00000	0.08716	0.00000
0.0	10.0	0.17453	0.00000	0.17365	0.00000
0.0	15.0	0.26180	0.00000	0.25881	0.00000
5.0	-20.0	-0.34907	0.08716	-0.34065	0.09258
5.0	-15.0	-0.26180	0.08716	-0.25781	0.09026
5.0	-10.0	-0.17453	0.08716	-0.17298	0.08860
5.0	-5.0	-0.08727	0.08716	-0.08682	0.08760
5.0	0.0	0.00000	0.08716	0.00000	0.08727
5.0	5.0	0.08727	0.08716	0.08682	0.08760
5.0	10.0	0.17453	0.08716	0.17298	0.08860
5.0	15.0	0.26180	0.08716	0.25781	0.09026
10.0	-20.0	-0.34907	0.17365	-0.33666	0.18517
10.0	-15.0	-0.26180	0.17365	-0.25482	0.18051
10.0	-10.0	-0.17453	0.17365	-0.17099	0.17719
10.0	-5.0	-0.08727	0.17365	-0.08583	0.17520
10.0	0.0	0.00000	0.17365	0.00000	0.17453
10.0	5.0	0.08727	0.17365	0.08583	0.17520
10.0	10.0	0.17453	0.17365	0.17099	0.17719
10.0	15.0	0.26180	0.17365	0.25482	0.18051

Tabla 3

## Mercator Ecuatorial

Latitud inicial		0.00		Longitud inicial		0.00	
Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
-15.0	-20.0	-0.34907	-0.26484	-0.34907	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	-15.0	-0.26180	-0.26484	-0.26180	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	-10.0	-0.17453	-0.26484	-0.17453	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	-5.0	-0.08727	-0.26484	-0.08727	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	0.0	0.00000	-0.26484	0.00000	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	5.0	0.08727	-0.26484	0.08727	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	10.0	0.17453	-0.26484	0.17453	-0.26479	0.00000	-0.00005
-15.0	15.0	0.26180	-0.26484	0.26180	-0.26479	0.00000	-0.00005
-10.0	-20.0	-0.34907	-0.17543	-0.34907	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	-15.0	-0.26180	-0.17543	-0.26180	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	-10.0	-0.17453	-0.17543	-0.17453	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	-5.0	-0.08727	-0.17543	-0.08727	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	0.0	0.00000	-0.17543	0.00000	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	5.0	0.08727	-0.17543	0.08727	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	10.0	0.17453	-0.17543	0.17453	-0.17542	0.00000	-0.00001
-10.0	15.0	0.26180	-0.17543	0.26180	-0.17542	0.00000	-0.00001
-5.0	-20.0	-0.34907	-0.08738	-0.34907	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	-15.0	-0.26180	-0.08738	-0.26180	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	-10.0	-0.17453	-0.08738	-0.17453	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	-5.0	-0.08727	-0.08738	-0.08727	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	0.0	0.00000	-0.08738	0.00000	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	5.0	0.08727	-0.08738	0.08727	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	10.0	0.17453	-0.08738	0.17453	-0.08738	0.00000	-0.00000
-5.0	15.0	0.26180	-0.08738	0.26180	-0.08738	0.00000	-0.00000
0.0	-20.0	-0.34907	0.00000	-0.34907	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	-15.0	-0.26180	0.00000	-0.26180	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	-10.0	-0.17453	0.00000	-0.17453	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	-5.0	-0.08727	0.00000	-0.08727	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	5.0	0.08727	0.00000	0.08727	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	10.0	0.17453	0.00000	0.17453	0.00000	0.00000	-0.00000
0.0	15.0	0.26180	0.00000	0.26180	0.00000	0.00000	-0.00000
5.0	-20.0	-0.34907	0.08738	-0.34907	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	-15.0	-0.26180	0.08738	-0.26180	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	-10.0	-0.17453	0.08738	-0.17453	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	-5.0	-0.08727	0.08738	-0.08727	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	0.0	0.00000	0.08738	0.00000	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	5.0	0.08727	0.08738	0.08727	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	10.0	0.17453	0.08738	0.17453	0.08738	0.00000	0.00000
5.0	15.0	0.26180	0.08738	0.26180	0.08738	0.00000	0.00000
10.0	-20.0	-0.34907	0.17543	-0.34907	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	-15.0	-0.26180	0.17543	-0.26180	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	-10.0	-0.17453	0.17543	-0.17453	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	-5.0	-0.08727	0.17543	-0.08727	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	0.0	0.00000	0.17543	0.00000	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	5.0	0.08727	0.17543	0.08727	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	10.0	0.17453	0.17543	0.17453	0.17542	0.00000	0.00001
10.0	15.0	0.26180	0.17543	0.26180	0.17542	0.00000	0.00001

Tabla 4

Gnomónica

Latitud inicial 40.00 Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.33545	-0.24207	-0.32984	-0.24055	-0.00561	-0.00152
25.0	-15.0	-0.24894	-0.25361	-0.24617	-0.25246	-0.00277	-0.00115
25.0	-10.0	-0.16473	-0.26164	-0.16353	-0.26097	-0.00120	-0.00067
25.0	-5.0	-0.08200	-0.26638	-0.08159	-0.26608	-0.00041	-0.00030
25.0	0.0	0.00000	-0.26795	0.00000	-0.26778	0.00000	-0.00017
25.0	5.0	0.08200	-0.26638	0.08159	-0.26608	0.00041	-0.00030
25.0	10.0	0.16473	-0.26164	0.16353	-0.26097	0.00120	-0.00067
25.0	15.0	0.24894	-0.25361	0.24617	-0.25246	0.00277	-0.00115
30.0	-20.0	-0.31350	-0.14826	-0.31026	-0.14815	-0.00324	-0.00011
30.0	-15.0	-0.23295	-0.16076	-0.23148	-0.16047	-0.00147	-0.00029
30.0	-10.0	-0.15428	-0.16947	-0.15374	-0.16927	-0.00054	-0.00021
30.0	-5.0	-0.07684	-0.17462	-0.07670	-0.17455	-0.00014	-0.00008
30.0	0.0	0.00000	-0.17633	0.00000	-0.17631	0.00000	-0.00002
30.0	5.0	0.07684	-0.17462	0.07670	-0.17455	0.00014	-0.00008
30.0	10.0	0.15428	-0.16947	0.15374	-0.16927	0.00054	-0.00021
30.0	15.0	0.23295	-0.16076	0.23148	-0.16047	0.00147	-0.00029
35.0	-20.0	-0.29234	-0.05781	-0.29068	-0.05841	-0.00166	0.00060
35.0	-15.0	-0.21749	-0.07100	-0.21680	-0.07113	-0.00069	0.00013
35.0	-10.0	-0.14417	-0.08023	-0.14395	-0.08022	-0.00021	-0.00001
35.0	-5.0	-0.07184	-0.08568	-0.07180	-0.08567	-0.00004	-0.00001
35.0	0.0	0.00000	-0.08749	0.00000	-0.08749	0.00000	-0.00000
35.0	5.0	0.07184	-0.08568	0.07180	-0.08567	0.00004	-0.00001
35.0	10.0	0.14417	-0.08023	0.14395	-0.08022	0.00021	-0.00001
35.0	15.0	0.21749	-0.07100	0.21680	-0.07113	0.00069	0.00013
40.0	-20.0	-0.27162	0.03079	-0.27110	0.03000	-0.00052	0.00079
40.0	-15.0	-0.20231	0.01712	-0.20211	0.01687	-0.00020	0.00025
40.0	-10.0	-0.13422	0.00755	-0.13416	0.00750	-0.00006	0.00005
40.0	-5.0	-0.06691	0.00188	-0.06691	0.00187	-0.00001	0.00000
40.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
40.0	5.0	0.06691	0.00188	0.06691	0.00187	0.00001	0.00000
40.0	10.0	0.13422	0.00755	0.13416	0.00750	0.00006	0.00005
40.0	15.0	0.20231	0.01712	0.20211	0.01687	0.00020	0.00025
45.0	-20.0	-0.25100	0.11890	-0.25152	0.11841	0.00052	0.00049
45.0	-15.0	-0.18718	0.10498	-0.18743	0.10488	0.00025	0.00010
45.0	-10.0	-0.12428	0.09521	-0.12437	0.09522	0.00009	-0.00001
45.0	-5.0	-0.06199	0.08941	-0.06201	0.08942	0.00002	-0.00001
45.0	0.0	0.00000	0.08749	0.00000	0.08749	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06199	0.08941	0.06201	0.08942	-0.00002	-0.00001
45.0	10.0	0.12428	0.09521	0.12437	0.09522	-0.00009	-0.00001
45.0	15.0	0.18718	0.10498	0.18743	0.10488	-0.00025	0.00010
50.0	-20.0	-0.23018	0.20790	-0.23194	0.20815	0.00176	-0.00025
50.0	-15.0	-0.17186	0.19393	-0.17274	0.19422	0.00088	-0.00029
50.0	-10.0	-0.11421	0.18410	-0.11458	0.18427	0.00037	-0.00017
50.0	-5.0	-0.05700	0.17826	-0.05712	0.17830	0.00012	-0.00003
50.0	0.0	0.00000	0.17633	0.00000	0.17631	0.00000	0.00002
50.0	5.0	0.05700	0.17826	0.05712	0.17830	-0.00012	-0.00003
50.0	10.0	0.11421	0.18410	0.11458	0.18427	-0.00037	-0.00017
50.0	15.0	0.17186	0.19393	0.17274	0.19422	-0.00088	-0.00029

Tabla 5

Lambert Conforme

Latitud inicial 40.00 Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.32406	-0.22818	-0.32347	-0.22820	-0.00059	0.00002
25.0	-15.0	-0.24394	-0.24412	-0.24348	-0.24421	-0.00046	0.00009
25.0	-10.0	-0.16306	-0.25554	-0.16274	-0.25564	-0.00032	0.00011
25.0	-5.0	-0.08166	-0.26240	-0.08149	-0.26250	-0.00016	0.00010
25.0	0.0	0.00000	-0.26469	0.00000	-0.26479	0.00000	0.00010
25.0	5.0	0.08166	-0.26240	0.08149	-0.26250	0.00016	0.00010
25.0	10.0	0.16306	-0.25554	0.16274	-0.25564	0.00032	0.00011
25.0	15.0	0.24394	-0.24412	0.24348	-0.24421	0.00046	0.00009
30.0	-20.0	-0.30419	-0.14112	-0.30389	-0.14103	-0.00030	-0.00010
30.0	-15.0	-0.22898	-0.15608	-0.22879	-0.15607	-0.00019	-0.00001
30.0	-10.0	-0.15306	-0.16680	-0.15295	-0.16682	-0.00011	0.00002
30.0	-5.0	-0.07665	-0.17325	-0.07660	-0.17327	-0.00005	0.00002
30.0	0.0	0.00000	-0.17540	0.00000	-0.17542	0.00000	0.00002
30.0	5.0	0.07665	-0.17325	0.07660	-0.17327	0.00005	0.00002
30.0	10.0	0.15306	-0.16680	0.15295	-0.16682	0.00011	0.00002
30.0	15.0	0.22898	-0.15608	0.22879	-0.15607	0.00019	-0.00001
35.0	-20.0	-0.28460	-0.05531	-0.28431	-0.05518	-0.00030	-0.00013
35.0	-15.0	-0.21424	-0.06930	-0.21411	-0.06927	-0.00013	-0.00004
35.0	-10.0	-0.14320	-0.07933	-0.14316	-0.07933	-0.00005	-0.00001
35.0	-5.0	-0.07171	-0.08536	-0.07170	-0.08536	-0.00001	0.00000
35.0	0.0	0.00000	-0.08738	0.00000	-0.08738	0.00000	0.00000
35.0	5.0	0.07171	-0.08536	0.07170	-0.08536	0.00001	0.00000
35.0	10.0	0.14320	-0.07933	0.14316	-0.07933	0.00005	-0.00001
35.0	15.0	0.21424	-0.06930	0.21411	-0.06927	0.00013	-0.00004
40.0	-20.0	-0.26516	0.02988	-0.26473	0.03000	-0.00044	-0.00012
40.0	-15.0	-0.19960	0.01684	-0.19942	0.01687	-0.00018	-0.00004
40.0	-10.0	-0.13342	0.00749	-0.13337	0.00750	-0.00005	-0.00001
40.0	-5.0	-0.06681	0.00187	-0.06681	0.00187	-0.00001	-0.00000
40.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
40.0	5.0	0.06681	0.00187	0.06681	0.00187	0.00001	-0.00000
40.0	10.0	0.13342	0.00749	0.13337	0.00750	0.00005	-0.00001
40.0	15.0	0.19960	0.01684	0.19942	0.01687	0.00018	-0.00004
45.0	-20.0	-0.24572	0.11506	-0.24515	0.11518	-0.00057	-0.00011
45.0	-15.0	-0.18497	0.10298	-0.18474	0.10302	-0.00023	-0.00003
45.0	-10.0	-0.12364	0.09432	-0.12358	0.09433	-0.00006	-0.00001
45.0	-5.0	-0.06192	0.08912	-0.06191	0.08911	-0.00000	0.00000
45.0	0.0	0.00000	0.08738	0.00000	0.08738	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06192	0.08912	0.06191	0.08911	0.00000	0.00000
45.0	10.0	0.12364	0.09432	0.12358	0.09433	0.00006	-0.00001
45.0	15.0	0.18497	0.10298	0.18474	0.10302	0.00023	-0.00003
50.0	-20.0	-0.22612	0.20094	-0.22557	0.20102	-0.00055	-0.00009
50.0	-15.0	-0.17021	0.18982	-0.17005	0.18982	-0.00016	-0.00000
50.0	-10.0	-0.11377	0.18185	-0.11379	0.18182	0.00001	0.00003
50.0	-5.0	-0.05698	0.17706	-0.05702	0.17702	0.00004	0.00004
50.0	0.0	0.00000	0.17546	0.00000	0.17542	0.00000	0.00004
50.0	5.0	0.05698	0.17706	0.05702	0.17702	-0.00004	0.00004
50.0	10.0	0.11377	0.18185	0.11379	0.18182	-0.00001	0.00003
50.0	15.0	0.17021	0.18982	0.17005	0.18982	0.00016	-0.00000

Tabla 6

# Proyección Policónica

Latitud inicial 40.00 Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.31521	-0.23851	-0.31430	-0.23457	-0.00091	-0.00394
25.0	-15.0	-0.23679	-0.24869	-0.23661	-0.24648	-0.00018	-0.00220
25.0	-10.0	-0.15804	-0.25597	-0.15815	-0.25499	0.00012	-0.00098
25.0	-5.0	-0.07907	-0.26034	-0.07920	-0.26010	0.00013	-0.00024
25.0	0.0	0.00000	-0.26180	0.00000	-0.26180	0.00000	0.00000
25.0	5.0	0.07907	-0.26034	0.07920	-0.26010	-0.00013	-0.00024
25.0	10.0	0.15804	-0.25597	0.15815	-0.25499	-0.00012	-0.00098
25.0	15.0	0.23679	-0.24869	0.23661	-0.24648	0.00018	-0.00220
30.0	-20.0	-0.30077	-0.14822	-0.29981	-0.14638	-0.00095	-0.00184
30.0	-15.0	-0.22608	-0.15971	-0.22574	-0.15870	-0.00034	-0.00102
30.0	-10.0	-0.15096	-0.16794	-0.15091	-0.16749	-0.00005	-0.00045
30.0	-5.0	-0.07555	-0.17288	-0.07558	-0.17277	0.00003	-0.00011
30.0	0.0	0.00000	-0.17453	0.00000	-0.17453	0.00000	0.00000
30.0	5.0	0.07555	-0.17288	0.07558	-0.17277	-0.00003	-0.00011
30.0	10.0	0.15096	-0.16794	0.15091	-0.16749	0.00005	-0.00045
30.0	15.0	0.22608	-0.15971	0.22574	-0.15870	0.00034	-0.00102
35.0	-20.0	-0.28403	-0.05874	-0.28329	-0.05819	-0.00074	-0.00055
35.0	-15.0	-0.21365	-0.07120	-0.21334	-0.07091	-0.00030	-0.00028
35.0	-10.0	-0.14273	-0.08012	-0.14265	-0.08000	-0.00008	-0.00012
35.0	-5.0	-0.07145	-0.08548	-0.07145	-0.08545	-0.00001	-0.00003
35.0	0.0	0.00000	-0.08727	0.00000	-0.08727	0.00000	0.00000
35.0	5.0	0.07145	-0.08548	0.07145	-0.08545	0.00001	-0.00003
35.0	10.0	0.14273	-0.08012	0.14265	-0.08000	0.00008	-0.00012
35.0	15.0	0.21365	-0.07120	0.21334	-0.07091	0.00030	-0.00028
40.0	-20.0	-0.26516	0.02987	-0.26473	0.03000	-0.00044	-0.00013
40.0	-15.0	-0.19960	0.01683	-0.19942	0.01687	-0.00018	-0.00004
40.0	-10.0	-0.13342	0.00749	-0.13337	0.00750	-0.00005	-0.00001
40.0	-5.0	-0.06681	0.00187	-0.06681	0.00187	-0.00001	-0.00000
40.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
40.0	5.0	0.06681	0.00187	0.06681	0.00187	0.00001	-0.00000
40.0	10.0	0.13342	0.00749	0.13337	0.00750	0.00005	-0.00001
40.0	15.0	0.19960	0.01683	0.19942	0.01687	0.00018	-0.00004
45.0	-20.0	-0.24433	0.11757	-0.24413	0.11819	-0.00020	-0.00061
45.0	-15.0	-0.18406	0.10435	-0.18397	0.10466	-0.00009	-0.00031
45.0	-10.0	-0.12310	0.09487	-0.12307	0.09500	-0.00003	-0.00012
45.0	-5.0	-0.06167	0.08917	-0.06166	0.08920	-0.00001	-0.00003
45.0	0.0	0.00000	0.08727	0.00000	0.08727	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06167	0.08917	0.06166	0.08920	0.00001	-0.00003
45.0	10.0	0.12310	0.09487	0.12307	0.09500	0.00003	-0.00012
45.0	15.0	0.18406	0.10435	0.18397	0.10466	0.00009	-0.00031
50.0	-20.0	-0.22171	0.20435	-0.22149	0.20638	-0.00022	-0.00202
50.0	-15.0	-0.16716	0.19135	-0.16700	0.19245	-0.00016	-0.00110
50.0	-10.0	-0.11185	0.18202	-0.11175	0.18249	-0.00010	-0.00047
50.0	-5.0	-0.05605	0.17641	-0.05600	0.17652	-0.00005	-0.00012
50.0	0.0	0.00000	0.17453	0.00000	0.17453	0.00000	0.00000
50.0	5.0	0.05605	0.17641	0.05600	0.17652	0.00005	-0.00012
50.0	10.0	0.11185	0.18202	0.11175	0.18249	0.00010	-0.00047
50.0	15.0	0.16716	0.19135	0.16700	0.19245	0.00016	-0.00110

Tabla 7

Sanson-Flamsteed o Sinusoidal

Latitud inicial		0.00		Longitud inicial		0.00	
Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
-15.0	-20.0	-0.33717	-0.26180	-0.33710	-0.26180	-0.00007	0.00000
-15.0	-15.0	-0.25288	-0.26180	-0.25283	-0.26180	-0.00005	0.00000
-15.0	-10.0	-0.16859	-0.26180	-0.16855	-0.26180	-0.00003	0.00000
-15.0	-5.0	-0.08429	-0.26180	-0.08428	-0.26180	-0.00002	0.00000
-15.0	0.0	0.00000	-0.26180	0.00000	-0.26180	0.00000	0.00000
-15.0	5.0	0.08429	-0.26180	0.08428	-0.26180	0.00002	0.00000
-15.0	10.0	0.16859	-0.26180	0.16855	-0.26180	0.00003	0.00000
-15.0	15.0	0.25288	-0.26180	0.25283	-0.26180	0.00005	0.00000
-10.0	-20.0	-0.34376	-0.17453	-0.34375	-0.17453	-0.00001	0.00000
-10.0	-15.0	-0.25782	-0.17453	-0.25781	-0.17453	-0.00001	0.00000
-10.0	-10.0	-0.17188	-0.17453	-0.17187	-0.17453	-0.00001	0.00000
-10.0	-5.0	-0.08594	-0.17453	-0.08594	-0.17453	-0.00000	0.00000
-10.0	0.0	0.00000	-0.17453	0.00000	-0.17453	0.00000	0.00000
-10.0	5.0	0.08594	-0.17453	0.08594	-0.17453	0.00000	0.00000
-10.0	10.0	0.17188	-0.17453	0.17187	-0.17453	0.00001	0.00000
-10.0	15.0	0.25782	-0.17453	0.25781	-0.17453	0.00001	0.00000
-5.0	-20.0	-0.34774	-0.08727	-0.34774	-0.08727	-0.00000	0.00000
-5.0	-15.0	-0.26080	-0.08727	-0.26080	-0.08727	-0.00000	0.00000
-5.0	-10.0	-0.17387	-0.08727	-0.17387	-0.08727	-0.00000	0.00000
-5.0	-5.0	-0.08693	-0.08727	-0.08693	-0.08727	-0.00000	0.00000
-5.0	0.0	0.00000	-0.08727	0.00000	-0.08727	0.00000	0.00000
-5.0	5.0	0.08693	-0.08727	0.08693	-0.08727	0.00000	0.00000
-5.0	10.0	0.17387	-0.08727	0.17387	-0.08727	0.00000	0.00000
-5.0	15.0	0.26080	-0.08727	0.26080	-0.08727	0.00000	0.00000
0.0	-20.0	-0.34907	0.00000	-0.34907	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	-15.0	-0.26180	0.00000	-0.26180	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	-10.0	-0.17453	0.00000	-0.17453	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	-5.0	-0.08727	0.00000	-0.08727	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	5.0	0.08727	0.00000	0.08727	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	10.0	0.17453	0.00000	0.17453	0.00000	0.00000	0.00000
0.0	15.0	0.26180	0.00000	0.26180	0.00000	0.00000	0.00000
5.0	-20.0	-0.34774	0.08727	-0.34774	0.08727	-0.00000	0.00000
5.0	-15.0	-0.26080	0.08727	-0.26080	0.08727	-0.00000	0.00000
5.0	-10.0	-0.17387	0.08727	-0.17387	0.08727	-0.00000	0.00000
5.0	-5.0	-0.08693	0.08727	-0.08693	0.08727	-0.00000	0.00000
5.0	0.0	0.00000	0.08727	0.00000	0.08727	0.00000	0.00000
5.0	5.0	0.08693	0.08727	0.08693	0.08727	0.00000	0.00000
5.0	10.0	0.17387	0.08727	0.17387	0.08727	0.00000	0.00000
5.0	15.0	0.26080	0.08727	0.26080	0.08727	0.00000	0.00000
10.0	-20.0	-0.34376	0.17453	-0.34375	0.17453	-0.00001	0.00000
10.0	-15.0	-0.25782	0.17453	-0.25781	0.17453	-0.00001	0.00000
10.0	-10.0	-0.17188	0.17453	-0.17187	0.17453	-0.00001	0.00000
10.0	-5.0	-0.08594	0.17453	-0.08594	0.17453	-0.00000	0.00000
10.0	0.0	0.00000	0.17453	0.00000	0.17453	0.00000	0.00000
10.0	5.0	0.08594	0.17453	0.08594	0.17453	0.00000	0.00000
10.0	10.0	0.17188	0.17453	0.17187	0.17453	0.00001	0.00000
10.0	15.0	0.25782	0.17453	0.25781	0.17453	0.00001	0.00000

Tabla 8

# Estereográfica

Latitud inicial 40.00 Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.32221	-0.23252	-0.32048	-0.23139	-0.00173	-0.00113
25.0	-15.0	-0.24154	-0.24607	-0.24071	-0.24535	-0.00083	-0.00073
25.0	-10.0	-0.16097	-0.25567	-0.16064	-0.25532	-0.00033	-0.00036
25.0	-5.0	-0.08047	-0.26140	-0.08037	-0.26130	-0.00009	-0.00010
25.0	0.0	0.00000	-0.26330	0.00000	-0.26329	0.00000	-0.00001
25.0	5.0	0.08047	-0.26140	0.08037	-0.26130	0.00009	-0.00010
25.0	10.0	0.16097	-0.25567	0.16064	-0.25532	0.00033	-0.00036
25.0	15.0	0.24154	-0.24607	0.24071	-0.24535	0.00083	-0.00073
30.0	-20.0	-0.30461	-0.14405	-0.30344	-0.14370	-0.00116	-0.00035
30.0	-15.0	-0.22846	-0.15766	-0.22794	-0.15739	-0.00052	-0.00027
30.0	-10.0	-0.15231	-0.16731	-0.15213	-0.16716	-0.00018	-0.00015
30.0	-5.0	-0.07615	-0.17306	-0.07611	-0.17302	-0.00004	-0.00004
30.0	0.0	0.00000	-0.17498	0.00000	-0.17498	0.00000	-0.00000
30.0	5.0	0.07615	-0.17306	0.07611	-0.17302	0.00004	-0.00004
30.0	10.0	0.15231	-0.16731	0.15213	-0.16716	0.00018	-0.00015
30.0	15.0	0.22846	-0.15766	0.22794	-0.15739	0.00052	-0.00027
35.0	-20.0	-0.28612	-0.05658	-0.28539	-0.05669	-0.00073	0.00011
35.0	-15.0	-0.21472	-0.07010	-0.21440	-0.07009	-0.00032	-0.00001
35.0	-10.0	-0.14320	-0.07969	-0.14310	-0.07966	-0.00010	-0.00002
35.0	-5.0	-0.07162	-0.08542	-0.07160	-0.08541	-0.00001	-0.00001
35.0	0.0	0.00000	-0.08732	0.00000	-0.08732	0.00000	-0.00000
35.0	5.0	0.07162	-0.08542	0.07160	-0.08541	0.00001	-0.00001
35.0	10.0	0.14320	-0.07969	0.14310	-0.07966	0.00010	-0.00002
35.0	15.0	0.21472	-0.07010	0.21440	-0.07009	0.00032	-0.00001
40.0	-20.0	-0.26672	0.03023	-0.26632	0.03000	-0.00040	0.00023
40.0	-15.0	-0.20027	0.01695	-0.20009	0.01687	-0.00018	0.00007
40.0	-10.0	-0.13362	0.00751	-0.13356	0.00750	-0.00005	0.00001
40.0	-5.0	-0.06684	0.00188	-0.06683	0.00187	-0.00001	0.00000
40.0	0.0	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
40.0	5.0	0.06684	0.00188	0.06683	0.00187	0.00001	0.00000
40.0	10.0	0.13362	0.00751	0.13356	0.00750	0.00005	0.00001
40.0	15.0	0.20027	0.01695	0.20009	0.01687	0.00018	0.00007
45.0	-20.0	-0.24634	0.11669	-0.24623	0.11668	-0.00011	0.00001
45.0	-15.0	-0.18507	0.10380	-0.18503	0.10384	-0.00005	-0.00004
45.0	-10.0	-0.12353	0.09463	-0.12352	0.09466	-0.00001	-0.00003
45.0	-5.0	-0.06181	0.08915	-0.06181	0.08916	0.00000	-0.00001
45.0	0.0	0.00000	0.08732	0.00000	0.08732	0.00000	0.00000
45.0	5.0	0.06181	0.08915	0.06181	0.08916	-0.00000	-0.00001
45.0	10.0	0.12353	0.09463	0.12352	0.09466	0.00001	-0.00003
45.0	15.0	0.18507	0.10380	0.18503	0.10384	0.00005	-0.00004
50.0	-20.0	-0.22489	0.20312	-0.22512	0.20370	0.00023	-0.00058
50.0	-15.0	-0.16907	0.19078	-0.16920	0.19113	0.00013	-0.00036
50.0	-10.0	-0.11290	0.18199	-0.11297	0.18216	0.00007	-0.00017
50.0	-5.0	-0.05650	0.17673	-0.05653	0.17677	0.00003	-0.00004
50.0	0.0	0.00000	0.17498	0.00000	0.17498	0.00000	0.00000
50.0	5.0	0.05650	0.17673	0.05653	0.17677	-0.00003	-0.00004
50.0	10.0	0.11290	0.18199	0.11297	0.18216	-0.00007	-0.00017
50.0	15.0	0.16907	0.19078	0.16920	0.19113	-0.00013	-0.00036

Tabla 9

Cónica Equivalente o de Albers

Latitud inicial 40.00

Longitud inicial 0.00

Lat	Long	X e Y directas		X e Y seg ord		Diferencia	
25.0	-20.0	-0.32284	-0.22285	-0.32347	-0.22222	0.00063	-0.00063
25.0	-15.0	-0.24302	-0.23872	-0.24348	-0.23823	0.00046	-0.00050
25.0	-10.0	-0.16244	-0.25010	-0.16274	-0.24966	0.00030	-0.00044
25.0	-5.0	-0.08135	-0.25694	-0.08149	-0.25652	0.00015	-0.00042
25.0	0.0	0.00000	-0.25922	0.00000	-0.25881	0.00000	-0.00041
25.0	5.0	0.08135	-0.25694	0.08149	-0.25652	-0.00015	-0.00042
25.0	10.0	0.16244	-0.25010	0.16274	-0.24966	-0.00030	-0.00044
25.0	15.0	0.24302	-0.23872	0.24348	-0.23823	-0.00046	-0.00050
30.0	-20.0	-0.30382	-0.13950	-0.30389	-0.13925	0.00007	-0.00025
30.0	-15.0	-0.22870	-0.15444	-0.22879	-0.15430	0.00009	-0.00014
30.0	-10.0	-0.15287	-0.16515	-0.15295	-0.16505	0.00008	-0.00010
30.0	-5.0	-0.07656	-0.17158	-0.07660	-0.17150	0.00004	-0.00009
30.0	0.0	0.00000	-0.17373	0.00000	-0.17365	0.00000	-0.00009
30.0	5.0	0.07656	-0.17158	0.07660	-0.17150	-0.00004	-0.00009
30.0	10.0	0.15287	-0.16515	0.15295	-0.16505	-0.00008	-0.00010
30.0	15.0	0.22870	-0.15444	0.22879	-0.15430	-0.00009	-0.00014
35.0	-20.0	-0.28456	-0.05510	-0.28431	-0.05496	-0.00025	-0.00014
35.0	-15.0	-0.21420	-0.06910	-0.21411	-0.06905	-0.00010	-0.00005
35.0	-10.0	-0.14318	-0.07912	-0.14316	-0.07911	-0.00002	-0.00001
35.0	-5.0	-0.07170	-0.08515	-0.07170	-0.08514	0.00000	-0.00001
35.0	0.0	0.00000	-0.08716	0.00000	-0.08716	0.00000	-0.00001
35.0	5.0	0.07170	-0.08515	0.07170	-0.08514	-0.00000	-0.00001
35.0	10.0	0.14318	-0.07912	0.14316	-0.07911	0.00002	-0.00001
35.0	15.0	0.21420	-0.06910	0.21411	-0.06905	0.00010	-0.00005
40.0	-20.0	-0.26516	0.02987	-0.26473	0.03000	-0.00044	-0.00013
40.0	-15.0	-0.19960	0.01683	-0.19942	0.01687	-0.00018	-0.00004
40.0	-10.0	-0.13342	0.00749	-0.13337	0.00750	-0.00005	-0.00001
40.0	-5.0	-0.06681	0.00187	-0.06681	0.00187	-0.00001	-0.00000
40.0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
40.0	5.0	0.06681	0.00187	0.06681	0.00187	0.00001	-0.00000
40.0	10.0	0.13342	0.00749	0.13337	0.00750	0.00005	-0.00001
40.0	15.0	0.19960	0.01683	0.19942	0.01687	0.00018	-0.00004
45.0	-20.0	-0.24577	0.11484	-0.24515	0.11496	-0.00063	-0.00012
45.0	-15.0	-0.18501	0.10275	-0.18474	0.10279	-0.00027	-0.00004
45.0	-10.0	-0.12366	0.09409	-0.12358	0.09411	-0.00009	-0.00001
45.0	-5.0	-0.06193	0.08889	-0.06191	0.08889	-0.00002	-0.00001
45.0	0.0	0.00000	0.08715	0.00000	0.08716	0.00000	-0.00001
45.0	5.0	0.06193	0.08889	0.06191	0.08889	0.00002	-0.00001
45.0	10.0	0.12366	0.09409	0.12358	0.09411	0.00009	-0.00001
45.0	15.0	0.18501	0.10275	0.18474	0.10279	0.00027	-0.00004
50.0	-20.0	-0.22655	0.19906	-0.22557	0.19925	-0.00099	-0.00019
50.0	-15.0	-0.17054	0.18792	-0.17005	0.18805	-0.00049	-0.00013
50.0	-10.0	-0.11399	0.17994	-0.11379	0.18005	-0.00021	-0.00011
50.0	-5.0	-0.05709	0.17514	-0.05702	0.17525	-0.00007	-0.00011
50.0	0.0	0.00000	0.17353	0.00000	0.17365	0.00000	-0.00011
50.0	5.0	0.05709	0.17514	0.05702	0.17525	0.00007	-0.00011
50.0	10.0	0.11399	0.17994	0.11379	0.18005	0.00021	-0.00011
50.0	15.0	0.17054	0.18792	0.17005	0.18805	0.00049	-0.00013

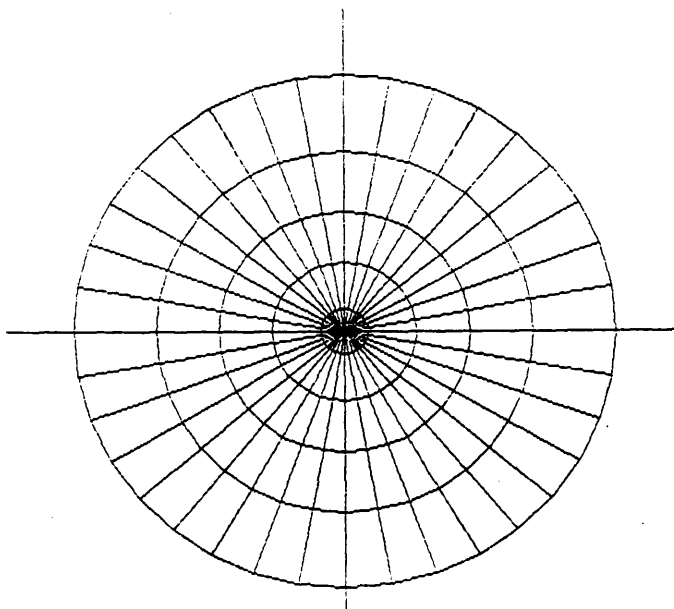
Tabla 10



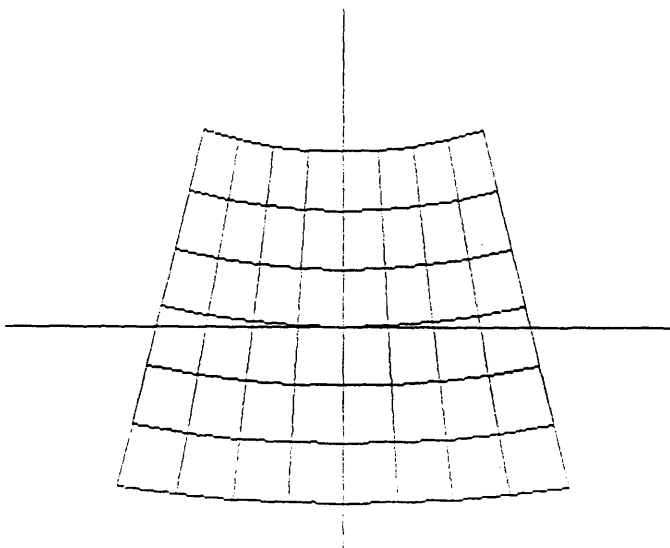
### APENDICE III

### RETICULAS

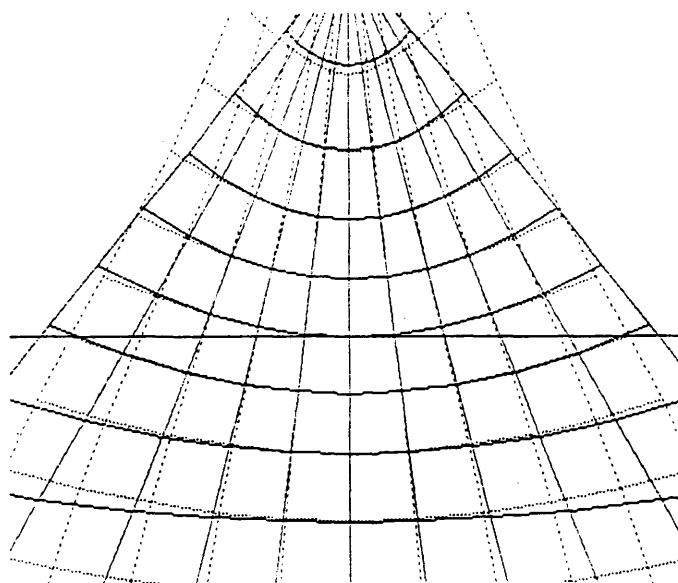




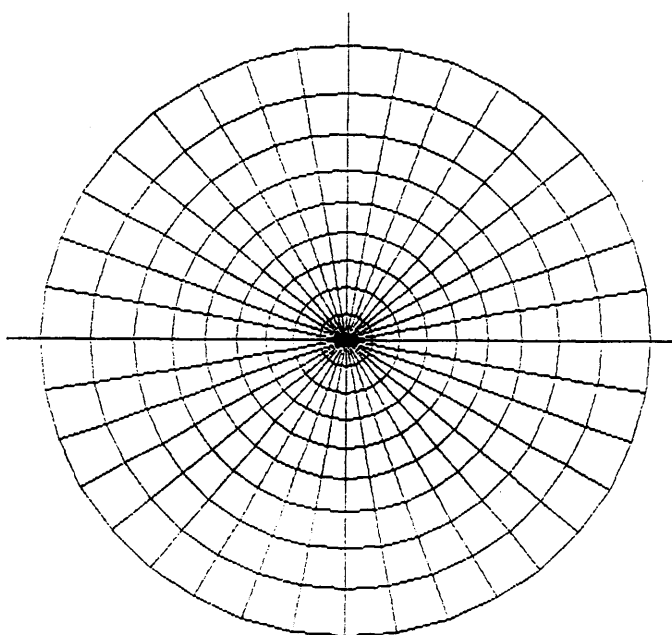
Retícula n. 1.- Gnomónica polar o directa  
 $\varphi_0 = 90^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 90^\circ$   $\Delta\lambda = 180^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



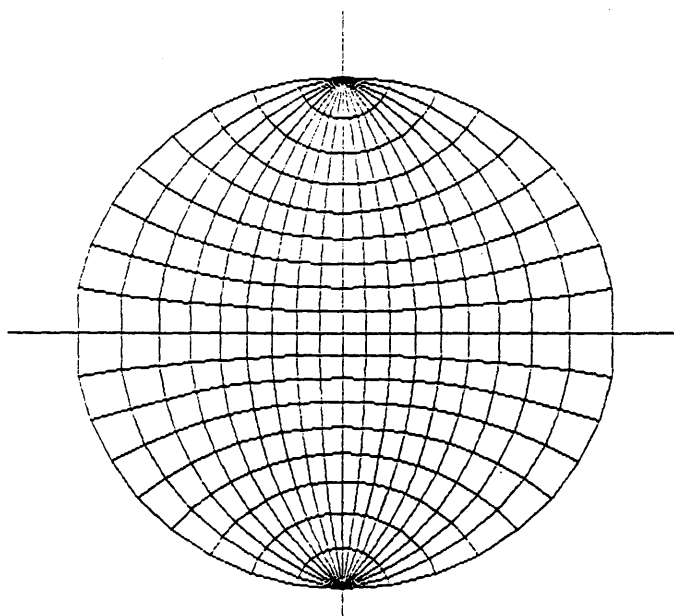
Retícula n. 2.- Gnomónica oblicua  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 30^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$



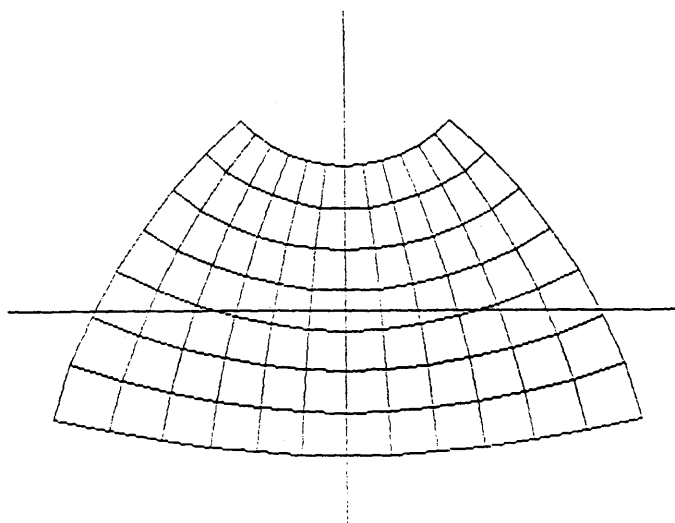
Retícula n. 3 .- Gnomónica ecuatorial con su correspondiente en segundo orden superpuesta.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 100^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



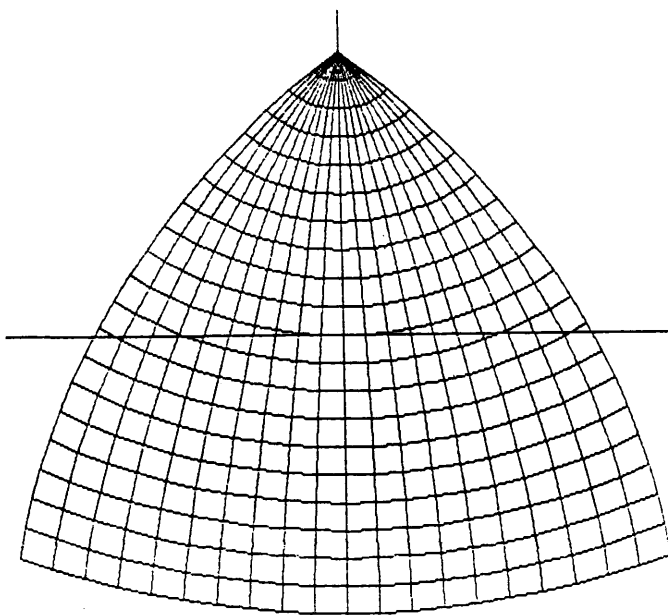
Retícula n. 4 .- Estereográfica directa o polar.  
 $\varphi_0 = 90^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 160^\circ$   $\Delta\lambda = 360^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



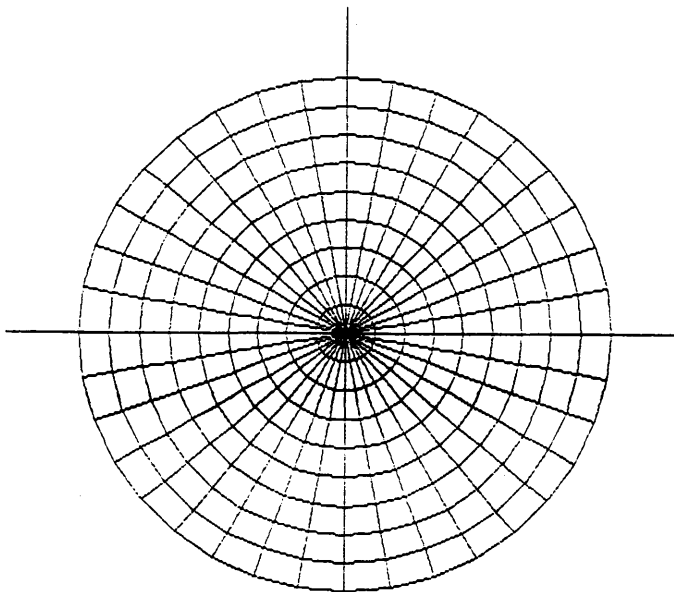
Reticula n. 5.- Estereográfica meridiana o transversa.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 180^\circ$   $\Delta\lambda = 180^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



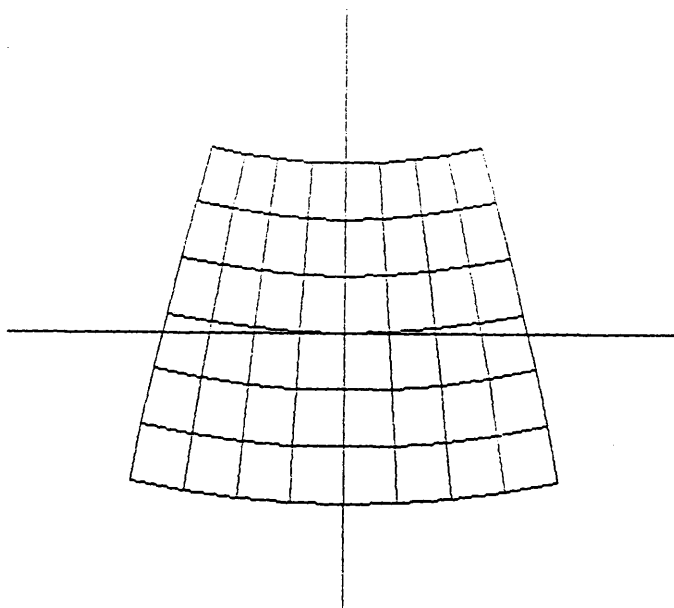
Reticula n. 6.- Estereográfica oblicua  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 70^\circ$   $\Delta\lambda = 120^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



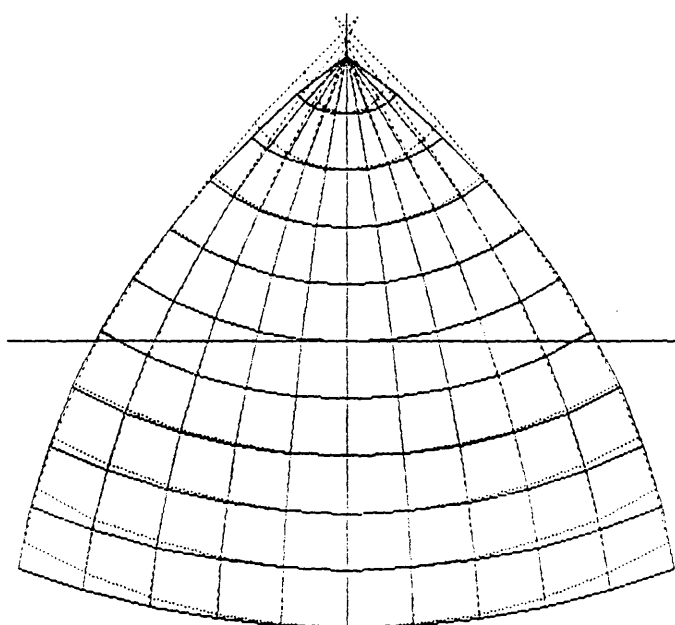
Reticula n. 7. - Azimutal equidistante, caso oblicuo.  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 100^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



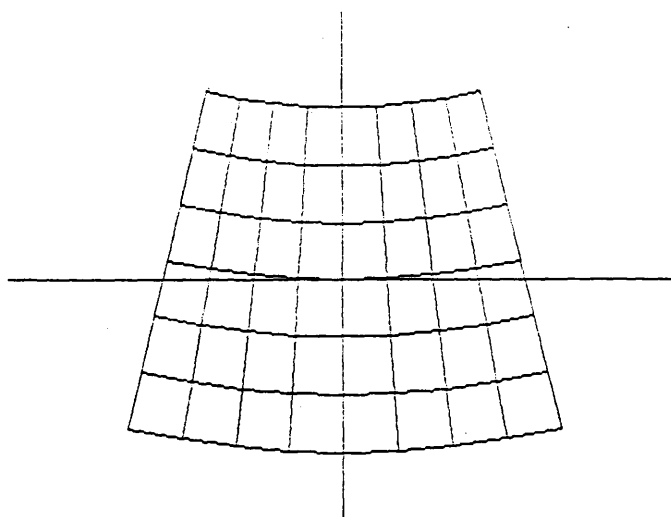
Reticula n. 8. - Azimutal equidistante, caso polar.  
 $\varphi_0 = 90^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 90^\circ$   $\Delta\lambda = 360^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



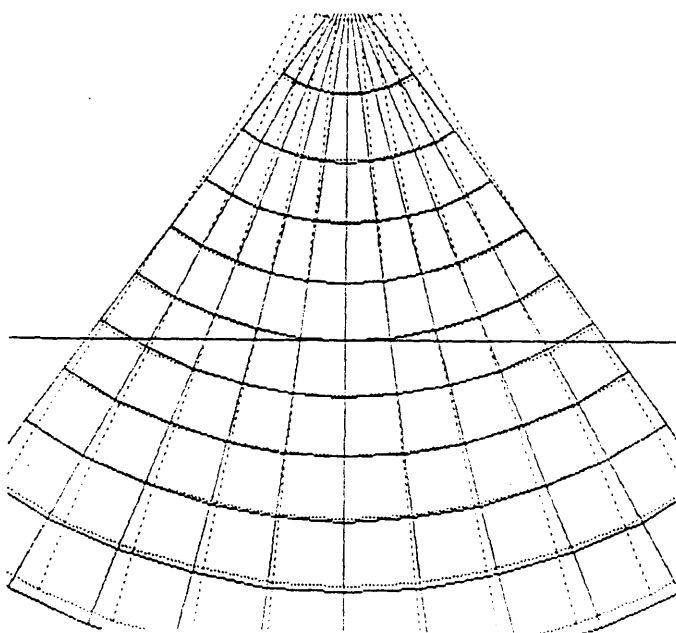
Retícula n. 9 .- Azimutal equivalente  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 30^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$



Retícula n. 10 .- Azimutal equivalente. Superpuesta la misma en  
segundo orden.  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 100^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$

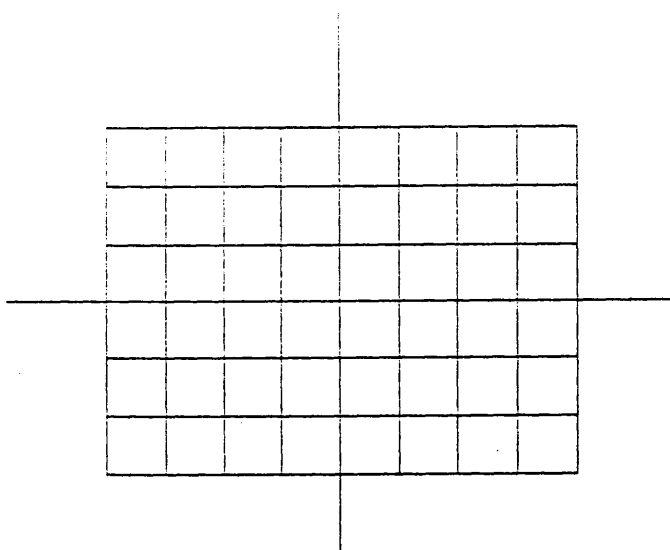


Reticula n. 11.- Lambert conforme.  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 90^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$

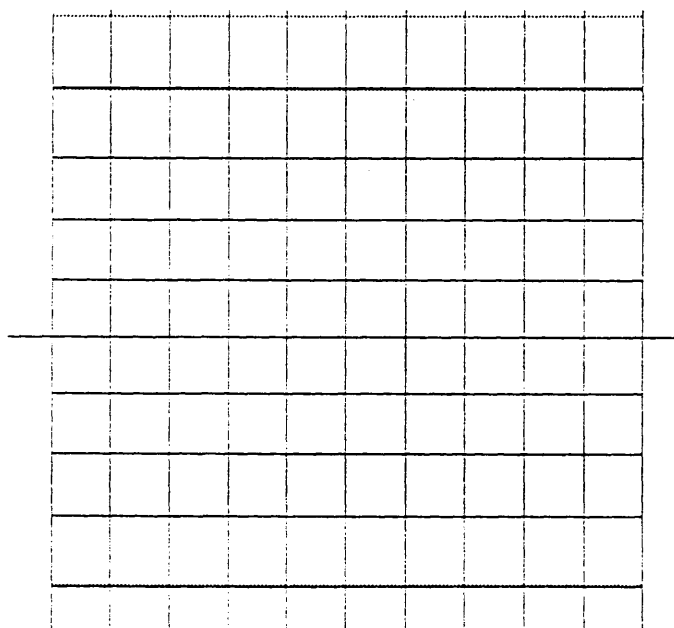


Reticula n. 12.- Lambert conforme con dos paralelos estandar. El eje de abscisas se ha tomado en  $\varphi_0$ . Se ha superpuesto la reticula de seg. ord.  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\varphi_2 = 50^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 100^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$

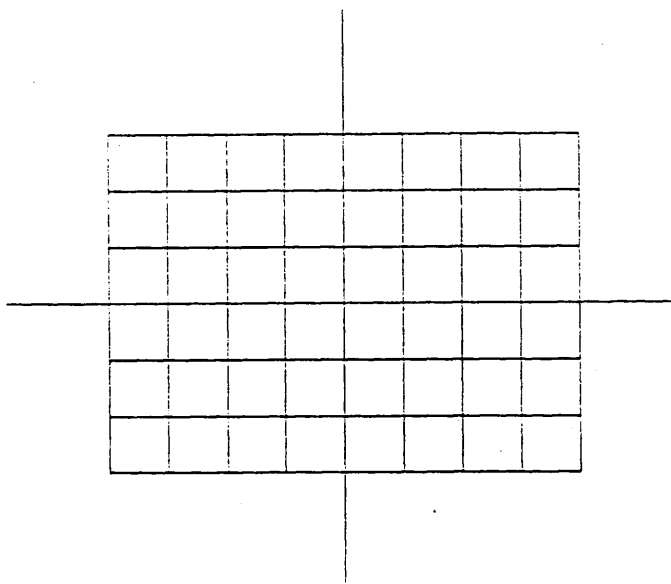




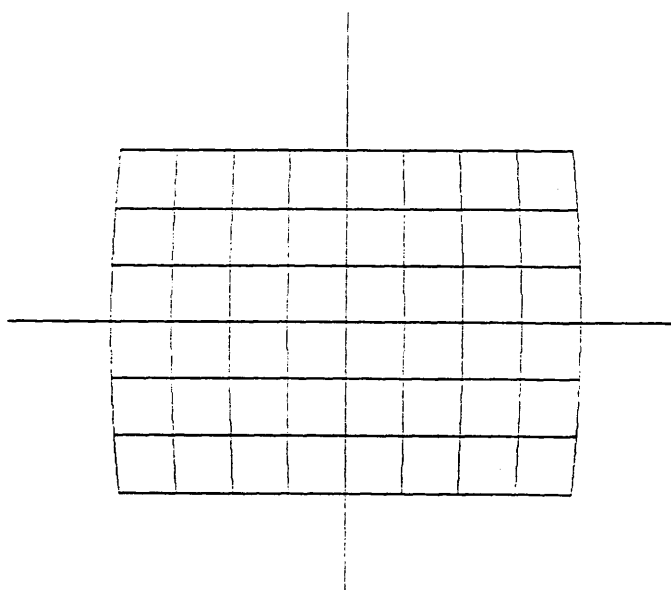
Reticula n. 13 .- Mercator directa.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 30^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$



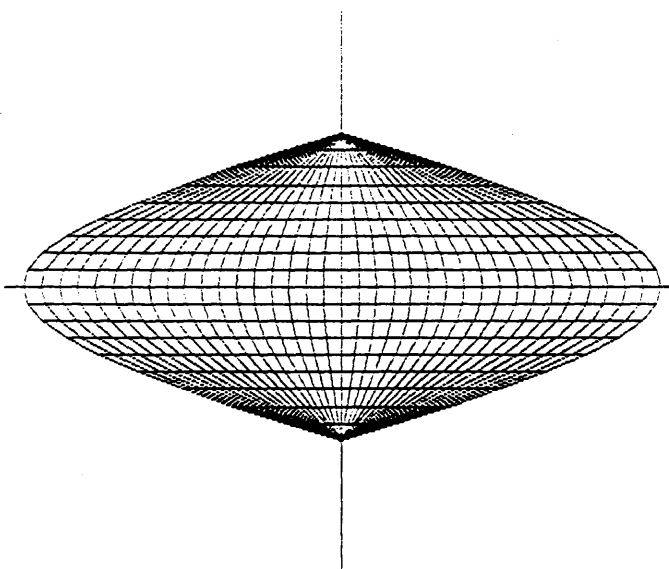
Reticula n. 14 .- Mercator directa. Superpuesta la de seg. ord.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 100^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



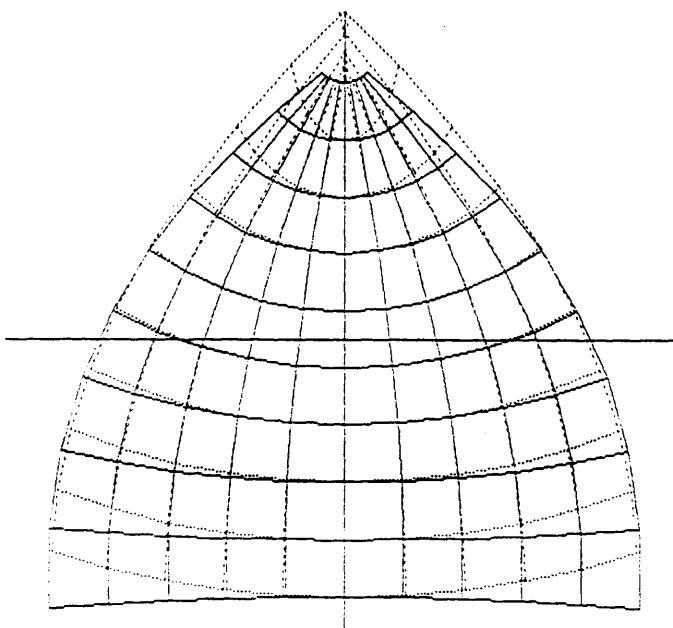
Reticula n. 15 .- Cilindrica equivalente.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 30^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$



Reticula n. 16 .- Sanson Flamsteed.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 30^\circ$   $\Delta\lambda = 40^\circ$ , pasos  $\varphi = 5^\circ$   $\lambda = 5^\circ$



Retícula n. 17 .- Sanson Flamsteed.  
 $\varphi_0 = 0^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 180^\circ$   $\Delta\lambda = 360^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



Retícula n. 18 .- Policónica simple. Superpuesta la de seg. ord.  
 $\varphi_0 = 40^\circ$   $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\Delta\varphi = 90^\circ$   $\Delta\lambda = 100^\circ$ , pasos  $\varphi = 10^\circ$   $\lambda = 10^\circ$



#### APENDICE IV

#### GRAFICOS



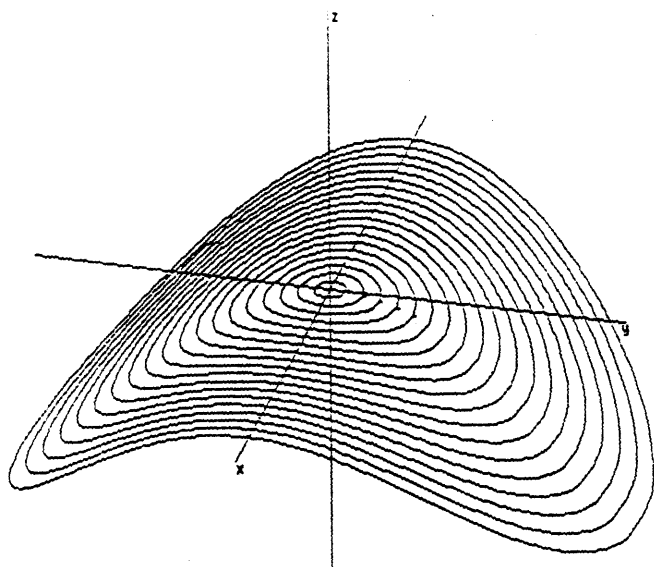


Gráfico n. 1 .- Dilatación euleriana en la proyección de Mercator directa.

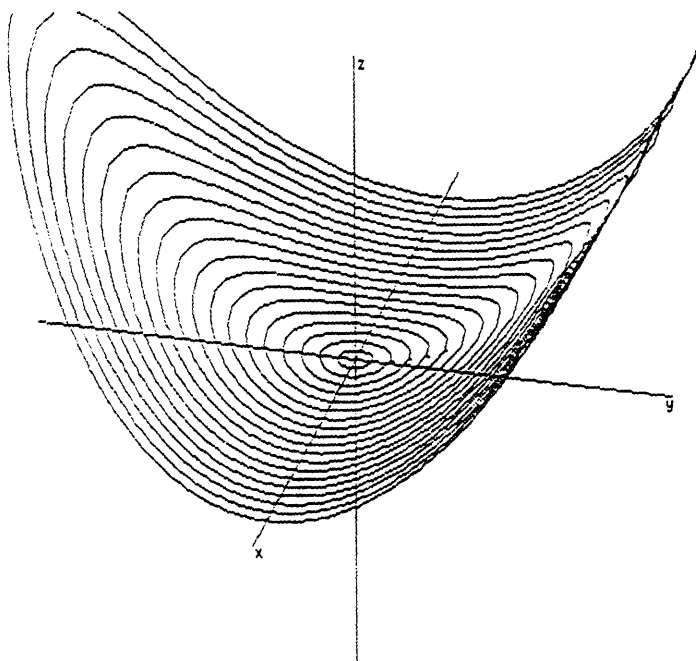


Gráfico n. 2 .- Dilatación lagragiana en la proyección de Mercator directa.

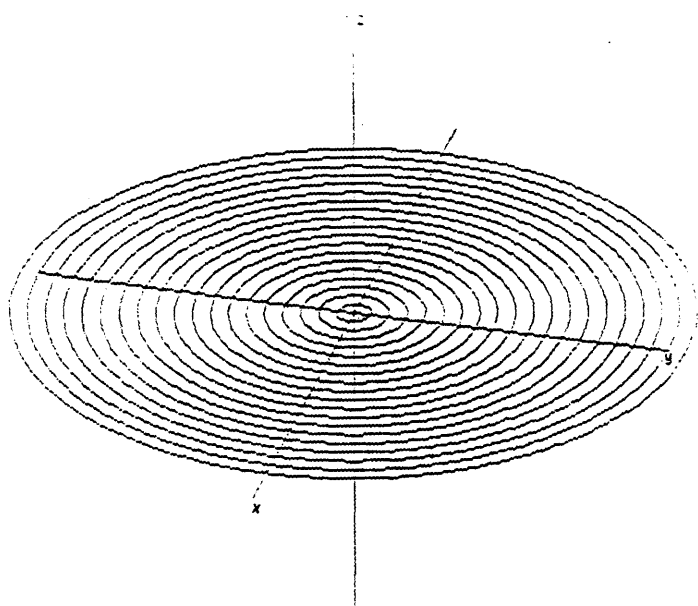


Gráfico n. 3 .- Cizalladura euleriana en la proyección estereográfica.

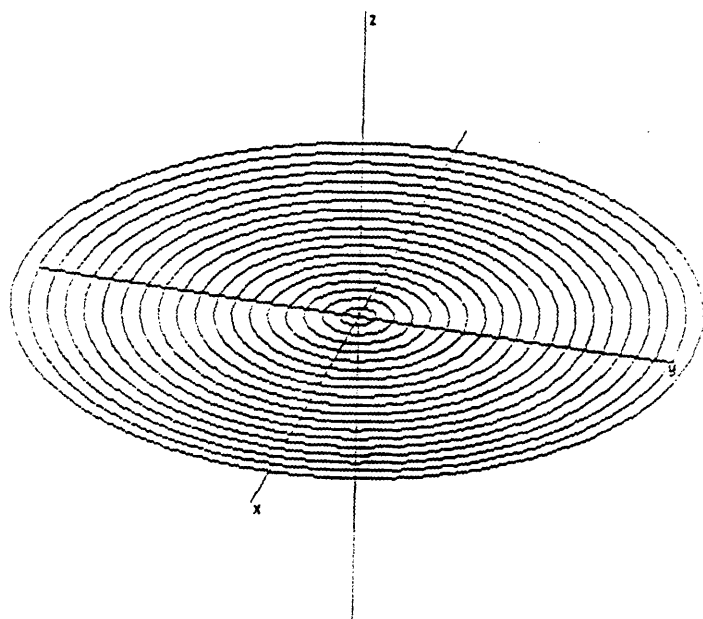


Gráfico n. 4 .- Energía euleriana en la proyección de mínima energía.



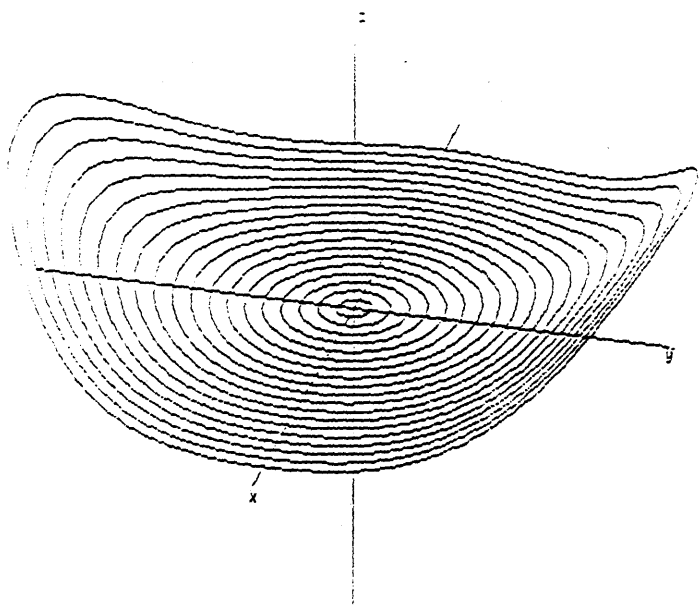


Gráfico n. 5 .- Energía euleriana en la Mercator directa.

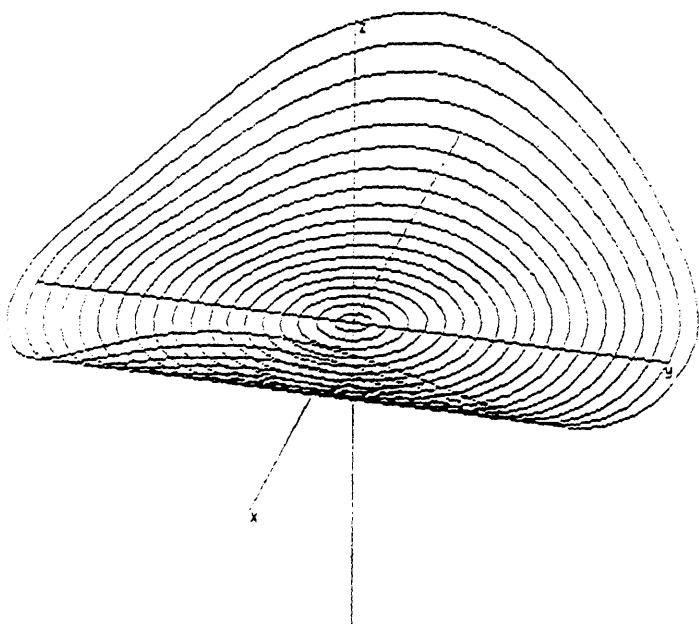


Gráfico n. 6 .- Energía euleriana en la Mercator transversa.

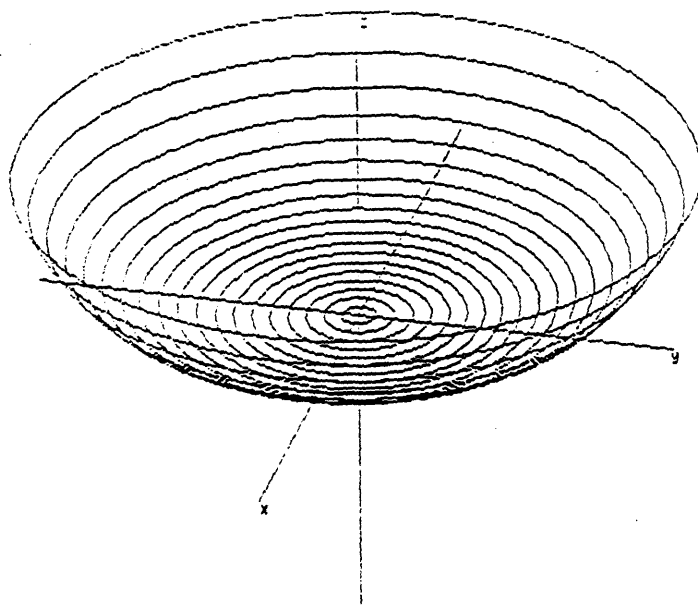


Gráfico n. 7 .- Energía euleriana en la proyección ortográfica.

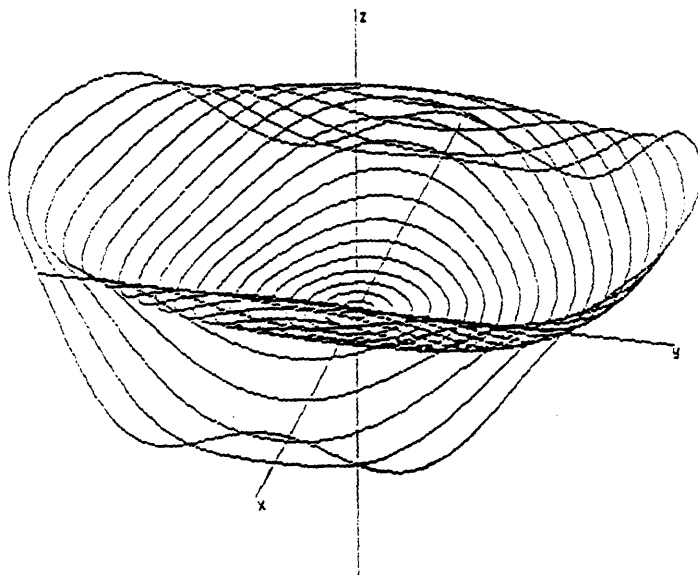


Gráfico n. 8 .- Energía euleriana en una proyección ortogonal donde se han tomado los valores 1, 0 y -5 para los grados de libertad correspondientes matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ .

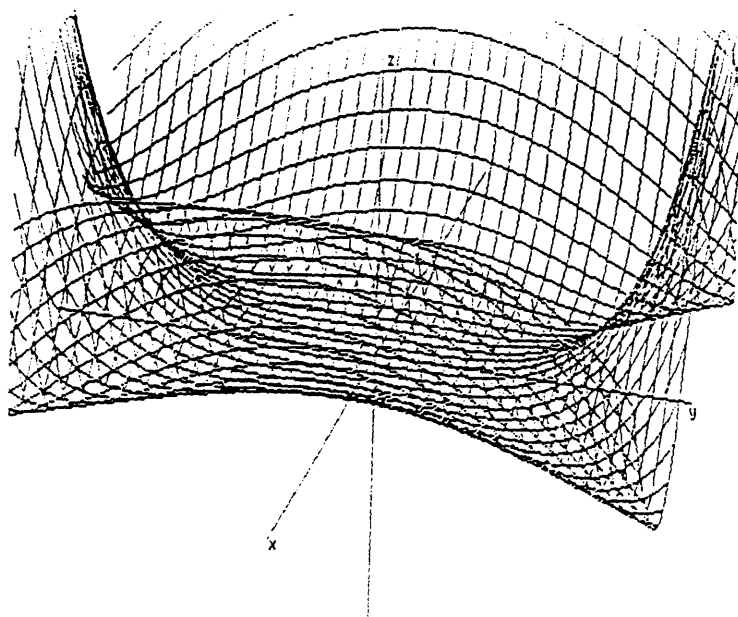


Gráfico n. 9 .- Energía euleriana en una proyección conforme en la que se ha dado el valor 1 al único grado de libertad ( $a_{11}^{60}$ ).

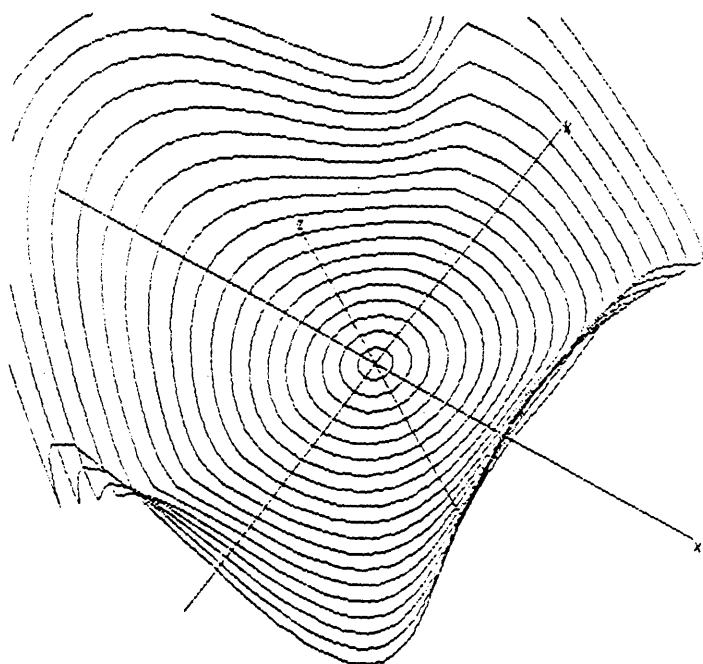


Gráfico n. 10 .- El mismo que en 9 pero con otra perspectiva conseguida al dar otros valores a los ángulos de Euler distintos de los recomendados.

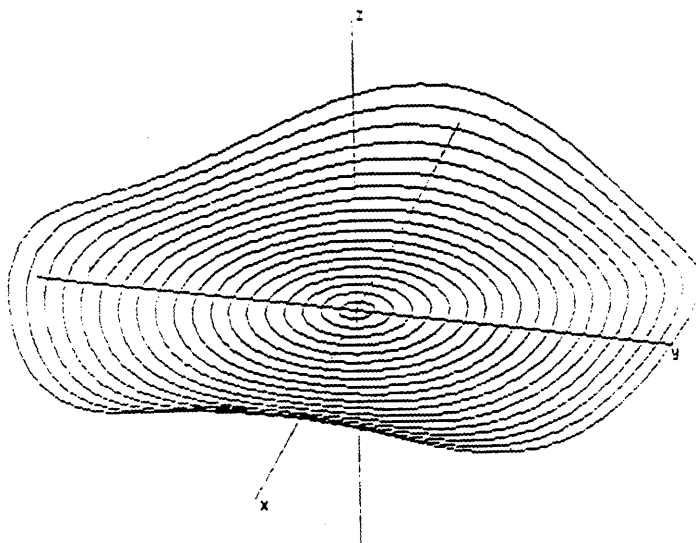


Gráfico n. 11 .- Energía euleriana en una proyección equivalente con  $n$

matriz 
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

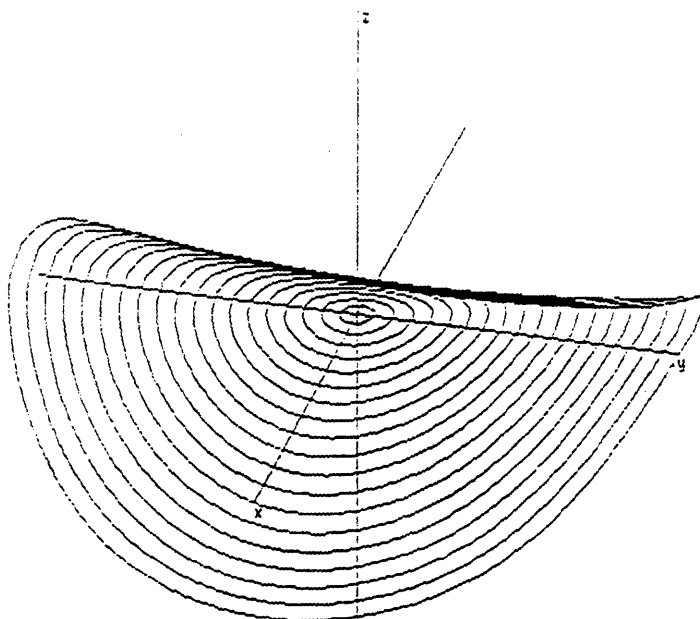


Gráfico n. 12 .- Dilatación euleriana en una proyección con equidistancia según el eje Y. Matriz 
$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -1.6 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

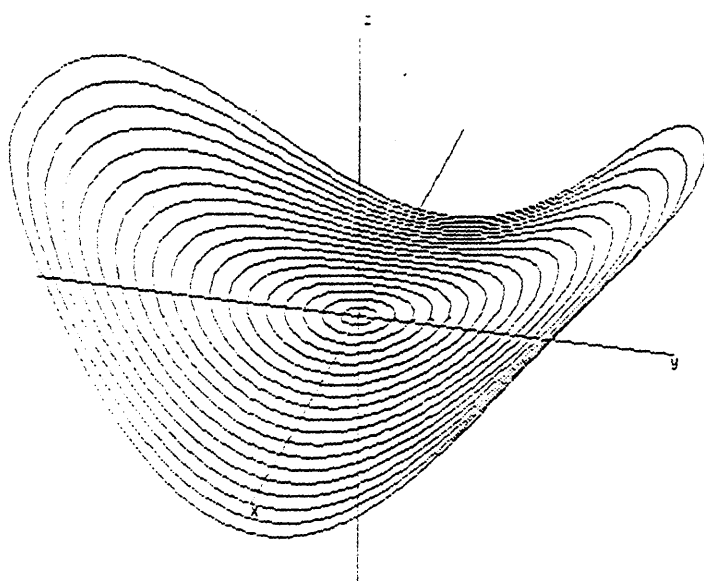


Gráfico n. 13.- Dilatación euleriana en una proyección con equidistancia según el eje X. Matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$ .

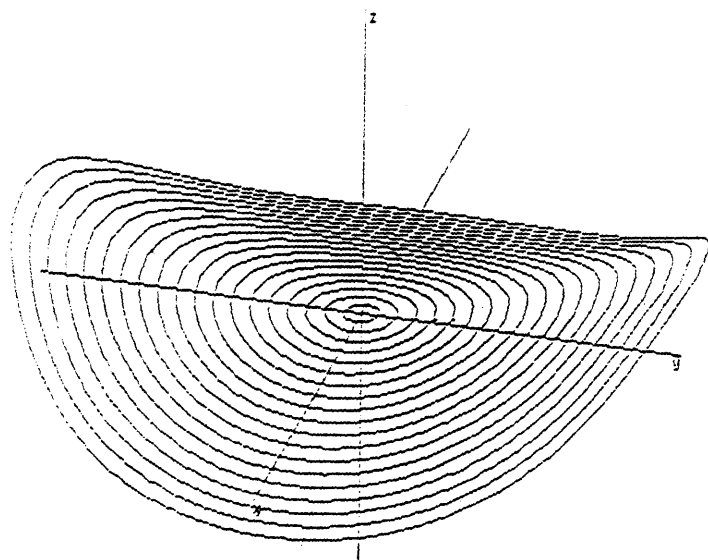


Gráfico n. 14.- Dilatación euleriana en una proyección que es ortogonal. Matriz  $\begin{pmatrix} 0.7 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ .

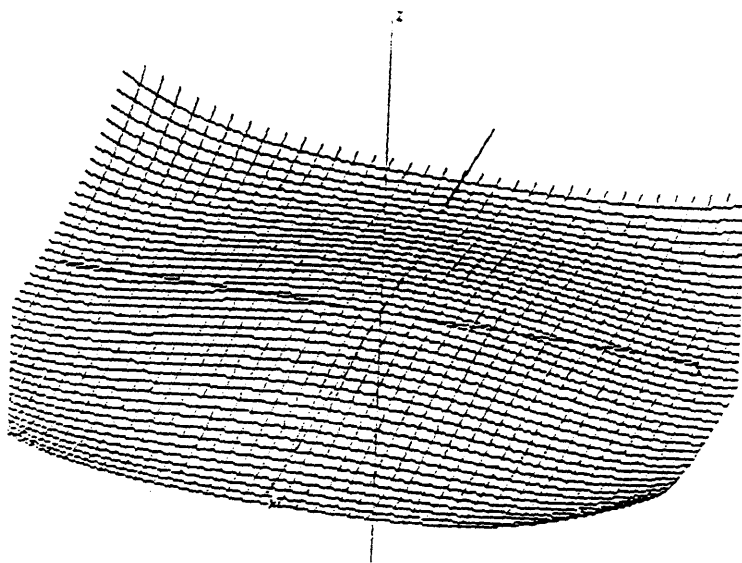


Gráfico n. 15.- Dilatación lagrangiana en una proyección con  
simetría radial. Matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

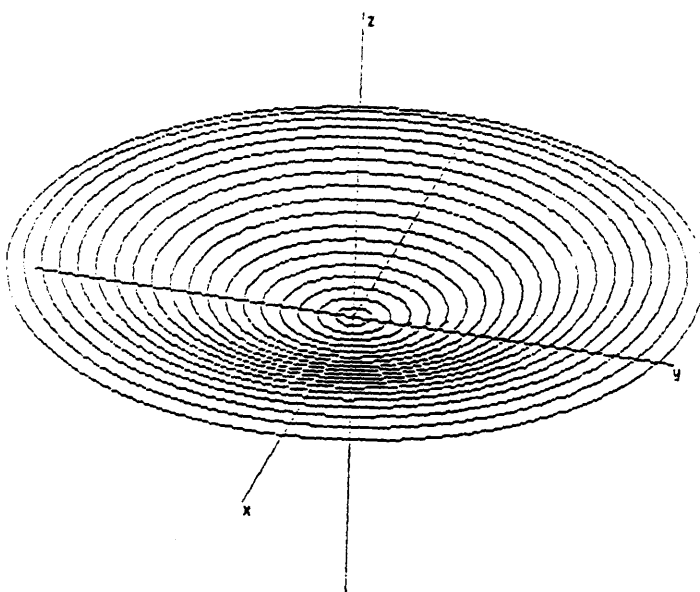


Gráfico n. 16.- Cizalladura euleriana en la proyección Gnomónica  
dibujada con circunferencias paralelas al plano XY.

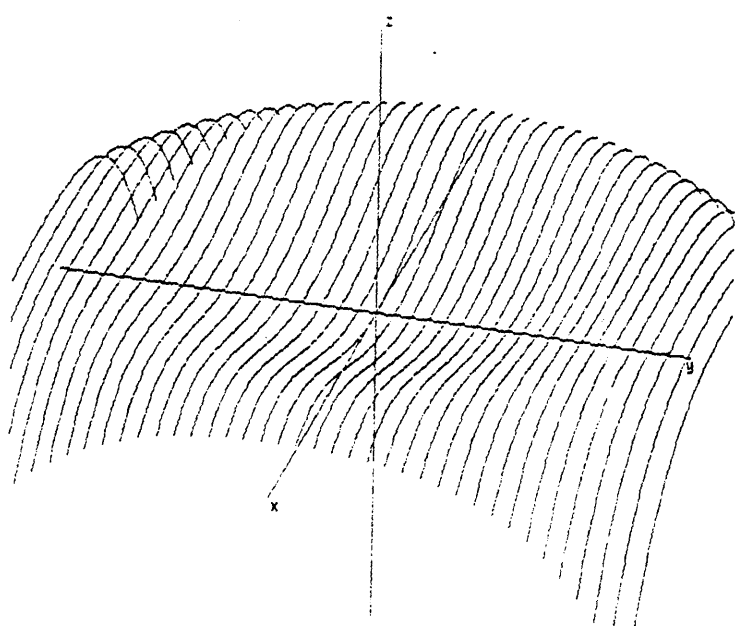


Gráfico n. 17.- Cizalladura euleriana en la proyección Gnomónica  
dibujada con líneas paralelas al eje X.

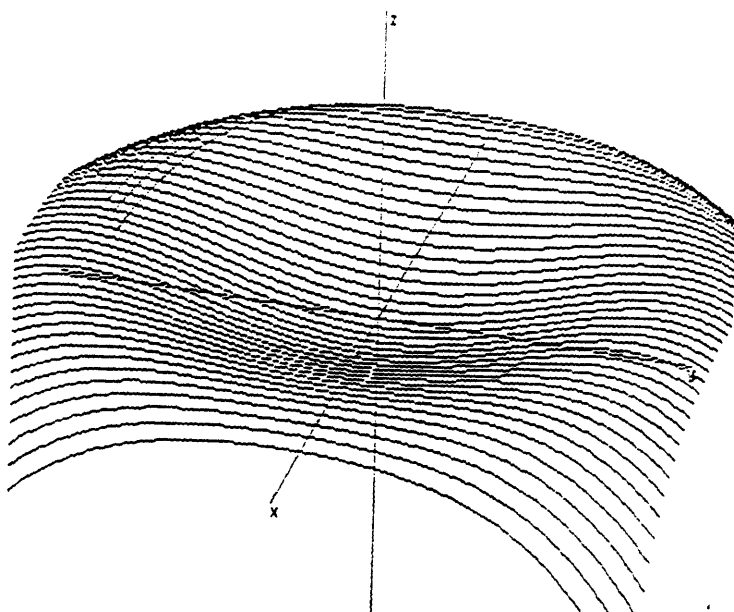


Gráfico n. 18.- Cizalladura euleriana en la proyección Gnomónica  
dibujada con líneas paralelas al eje Y.

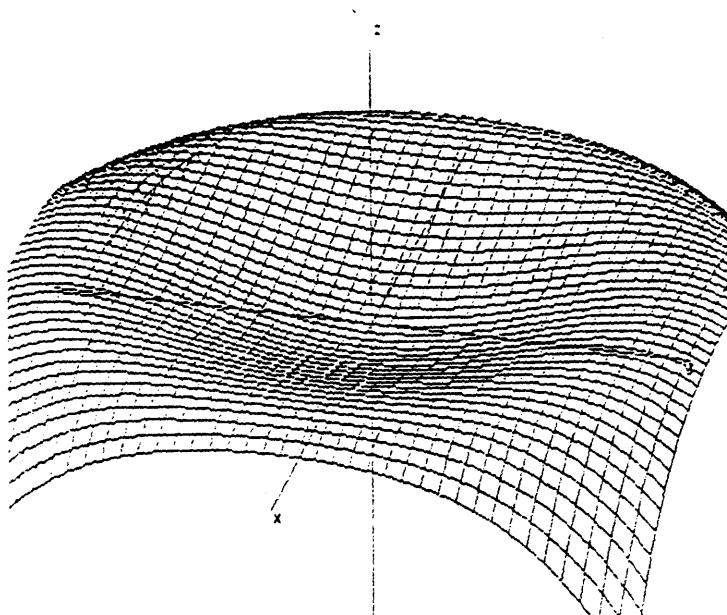


Gráfico n. 19.- Cizalladura euleriana en la proyección Gnomónica dibujada con líneas cruzadas.

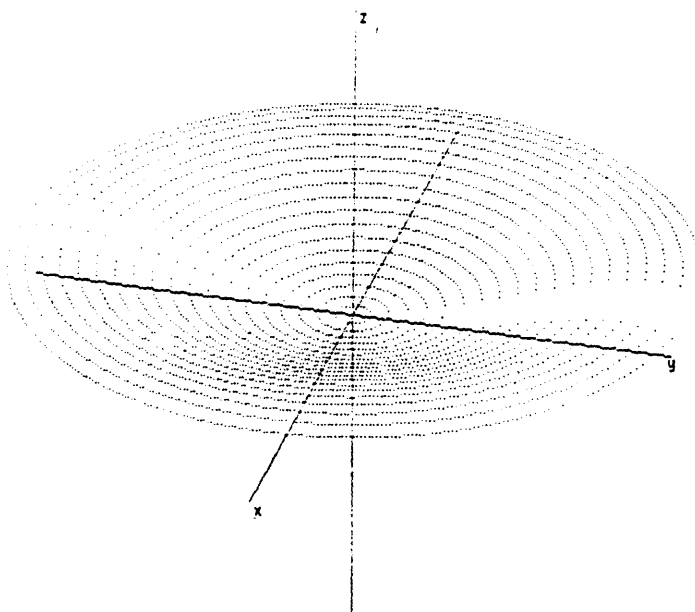


Gráfico n. 20.- Cizalladura euleriana en la proyección Gnomónica utilizando puntos para el dibujo.